

Problèmes elliptiques dans des polyèdres à plusieurs matériaux

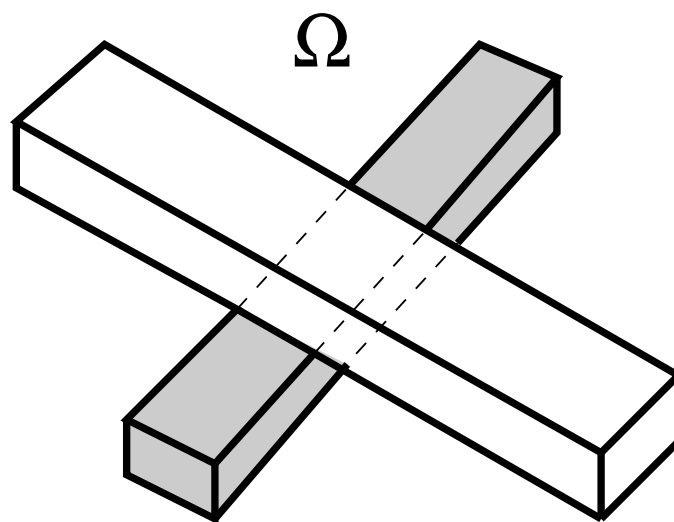
Collaboration avec H.-C. Kaiser and J. Rehberg (WIAS Berlin)

Robert Haller-Dintelmann

Technische Universität Darmstadt

Valenciennes, Janvier 2009

Problèmes elliptiques dans



Le problème elliptique

Soient

- ▶ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ouvert borné
- ▶ $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ mesurable, borné, symétrique et
$$\xi^T \mu(x) \xi \geq \eta |\xi|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \quad (\text{ellipticité})$$
- ▶ $f \in L^2(\Omega)$

Regardons

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \mu \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{condition de Neumann})$$

Formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

Le problème elliptique

Soient

- ▶ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ouvert borné
- ▶ $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ mesurable, borné, symétrique et
$$\xi^T \mu(x) \xi \geq \eta |\xi|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \quad (\text{ellipticité})$$
- ▶ $f \in L^2(\Omega)$

Regardons

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \mu \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{condition de Neumann}) \end{cases}$$

Formulation variationnelle

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv = \varphi(v) \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

Le problème elliptique

Soient

- ▶ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ouvert borné
- ▶ $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ mesurable, borné, symétrique et
$$\xi^T \mu(x) \xi \geq \eta |\xi|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \quad (\text{ellipticité})$$
- ▶ $f \in L^2(\Omega)$

Regardons

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \mu \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{condition de Neumann}) \end{cases}$$

Formulation variationnelle

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv = \varphi(v) \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

Théorème de Lax-Milgram : $\forall f \in L^2(\Omega) \quad \exists_1$ solution $u \in H^1(\Omega)$

Le problème elliptique

Soient

- ▶ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ouvert borné
- ▶ $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ mesurable, borné, symétrique et
$$\xi^T \mu(x) \xi \geq \eta |\xi|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \quad (\text{ellipticité})$$
- ▶ $f \in L^2(\Omega)$

Regardons

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \mu \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{condition de Neumann}) \end{cases}$$

Formulation variationnelle

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv = \varphi(v) \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

Théorème de Lax-Milgram : $\forall f \in (H^1(\Omega))' \quad \exists_1$ solution $u \in H^1(\Omega)$

Le problème elliptique

Soient

- ▶ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ouvert borné
- ▶ $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ mesurable, borné, symétrique et
$$\xi^T \mu(x) \xi \geq \eta |\xi|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \quad (\text{ellipticité})$$
- ▶ $f \in (H^1(\Omega))'$

Regardons

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \mu \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{condition de Neumann}) \end{cases}$$

Formulation variationnelle

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv = \varphi(v) \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

Théorème de Lax-Milgram : $\forall f \in (H^1(\Omega))' \quad \exists_1$ solution $u \in H^1(\Omega)$

Le problème de régularité dans L^p

On a

$$\blacktriangleright f \in (H^1(\Omega))' \rightsquigarrow u \in H^1(\Omega)$$

Est-ce qu'on a aussi

$$\blacktriangleright f \in (W^{1,p'}(\Omega))' \rightsquigarrow u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ pour } p > 2 \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right) ?$$

Le problème de régularité dans L^p

On a

$$\blacktriangleright f \in (H^1(\Omega))' \rightsquigarrow u \in H^1(\Omega)$$

Est-ce qu'on a aussi

$$\blacktriangleright f \in (W^{1,p'}(\Omega))' \rightsquigarrow u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ pour } p > 2 \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right) ?$$

NON !

Le problème de régularité dans L^p

On a

$$\blacktriangleright f \in (H^1(\Omega))' \rightsquigarrow u \in H^1(\Omega)$$

Est-ce qu'on a aussi

$$\blacktriangleright f \in (W^{1,p'}(\Omega))' \rightsquigarrow u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ pour } p > 2 \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right) ?$$

NON !

Obstructions

- ▶ $\partial\Omega$ non-régulier (coins, arêtes, ...)
- ▶ coefficient μ discontinu
- ▶ conditions au bord mixtes

Le problème de régularité dans L^p

Problème général

- ▶ Sous quelles conditions et pour quels $p > 2$ est-ce qu'on a

$$f \in (W^{1,p'}(\Omega))' \implies u \in W^{1,p}(\Omega) ?$$

En particulier

- ▶ Est-ce qu'il y a un tel $p > d$?
- ▶ Alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, donc la solution est continue

Ici

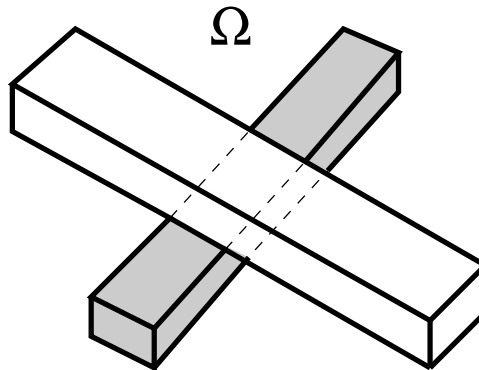
- ▶ $d = 3$
- ▶ Ω polyèdre
- ▶ μ constant par morceaux (décomposition en polyèdres)
- ▶ conditions de Neumann

Le problème de régularité dans L^p

Considérons

- ▶ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ polyèdre ouvert
- ▶ E_1, \dots, E_n plans qui intersectent $\Omega \rightsquigarrow$ partition de Ω en polyèdres
- ▶ coefficient μ constant sur chaque composante connexe de $\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^n E_j$.

Cas modèle dans cet exposé



Remarques

- ▶ **But** : Il existe $p > 3$, tel que $f \in (W^{1,p'}(\Omega))'$ implique $u \in W^{1,p}(\Omega)$
- ▶ **Problème** : Singularités de ∇u aux coins et arêtes

Résultats connus

- ▶ Gröger, '89
 - ▶ $d = 2, p > 2$
 - ▶ $\mu \in L^\infty$, Ω de bord Lipschitz, conditions au bord mixtes
- ▶ Dauge, '92
 - ▶ $d = 3, p > 3$
 - ▶ $\mu = \text{Id}$ (Laplacien), polyèdre convexe, conditions mixtes
- ▶ Nicaise, Sändig, '99 :
 - ▶ $d = 2, 3, p = 2$
 - ▶ polyèdres, conditions mixtes, coefficients constants par morceaux
- ▶ Mazya, Elschner, Rehberg, Schmidt, '04 :
 - ▶ Conditions de Dirichlet au bord
 - ▶ Réduction du problème au traitement des singularités aux arêtes
- ▶ ...

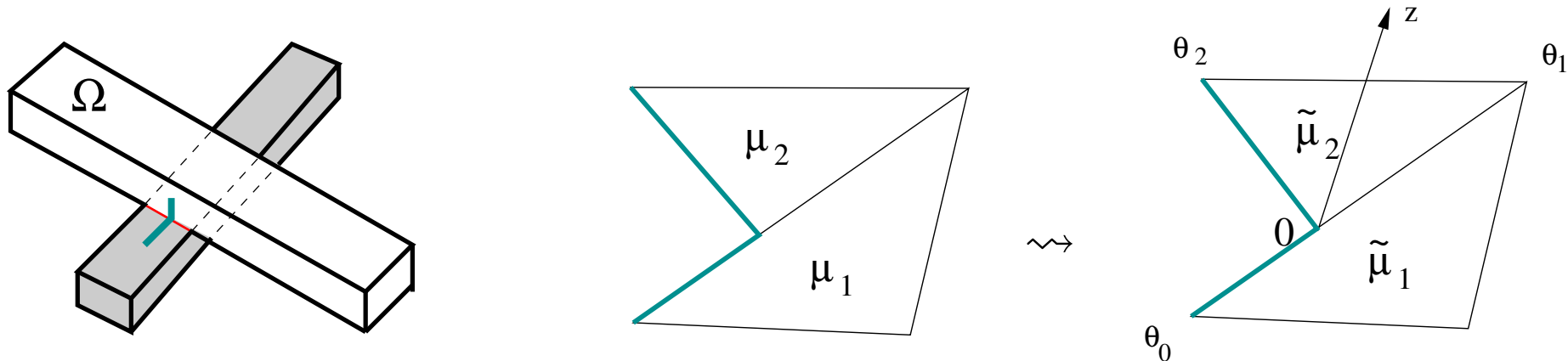
Le Résultat de Maz'ya, Elschner, Rehberg et Schmidt

Remarque

La propriété recherchée “ $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour un $p > 3$ ”

- ▶ peut être examiner par *localisation* et
- ▶ est invariante sous des *transformations bi-Lipschitz*.

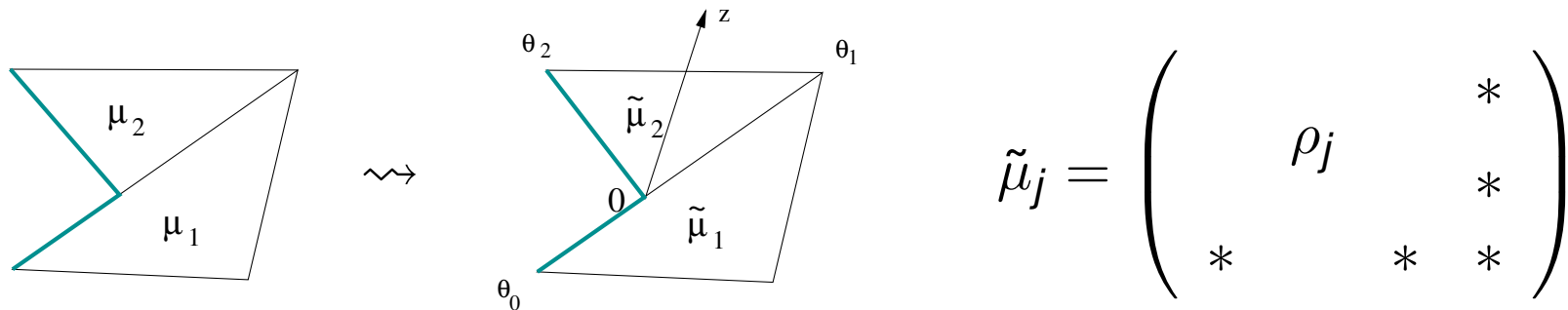
Singularités aux arêtes (Transformation de Mellin)



Pour chaque arête donnée par la géométrie :

- ▶ Transformation affine posant l'arête sur l'axe z
- ▶ $\tilde{\mu}_j$: coefficient μ_j transformé
- ▶ ρ_j : partie 2×2 de $\tilde{\mu}_j$ dans les directions x et y

Le résultat de MERS – Notations



On considère

la variable angulaire $\theta \in [\theta_0, \theta_m]$ et pour tout $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} b_0 &:= \rho_{11}^j \cos^2 \theta + 2\rho_{12}^j \sin \theta \cos \theta + \rho_{22}^j \sin^2 \theta \\ b_1 &:= (\rho_{22}^j - \rho_{11}^j) \sin \theta \cos \theta + \rho_{12}^j (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ b_2 &:= \rho_{11}^j \sin^2 \theta - 2\rho_{12}^j \sin \theta \cos \theta + \rho_{22}^j \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

On définit

l'opérateur \mathcal{A}_λ , $\lambda \in \mathbb{C}$, dans $L^2(] \theta_0, \theta_m [)$ par la forme sectorielle

$$a_\lambda(u, v) := \int_{\theta_0}^{\theta_m} (b_2 u' \bar{v}' + \lambda b_1 u \bar{v}' - \lambda b_1 u' \bar{v} - \lambda^2 b_0 u \bar{v}) \, d\theta, \quad u, v \in H_0^1(] \theta_0, \theta_m [)$$

pour conditions au bord de Neumann/Dirichlet.

Le résultat de MERS – Réduction aux arêtes

Idée de base

Distribution des λ avec $\ker(\mathcal{A}_\lambda) \neq \{0\}$ donne des informations sur l'intégrabilité de ∇u .

Théorème (Maz'ya, Elschner, Rehberg, Schmidt, 2004)

Si pour toute arête $\ker(\mathcal{A}_\lambda) = \{0\} \quad \forall \operatorname{Re}(\lambda) \in]0, 1/3]$,
alors il existe $p > 3$, t.q.

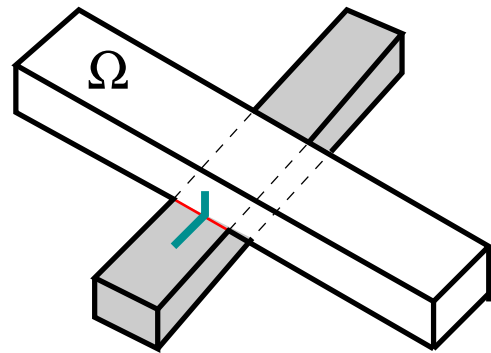
$$-\nabla \cdot \mu \nabla : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$

est un isomorphisme topologique.

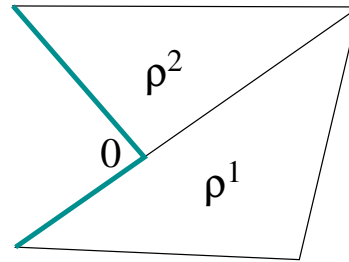
Remarques

- ▶ Les singularités dans les coins peuvent être négligées
- ▶ Le théorème est seulement connu pour des conditions de *Dirichlet*
- ▶ Les λ avec $\operatorname{Re}(\lambda) \in]0, 1[$ et $\ker(\mathcal{A}_\lambda) \neq \{0\}$ sont dénommés *valeurs singulières*

Transformation à un problème de Dirichlet



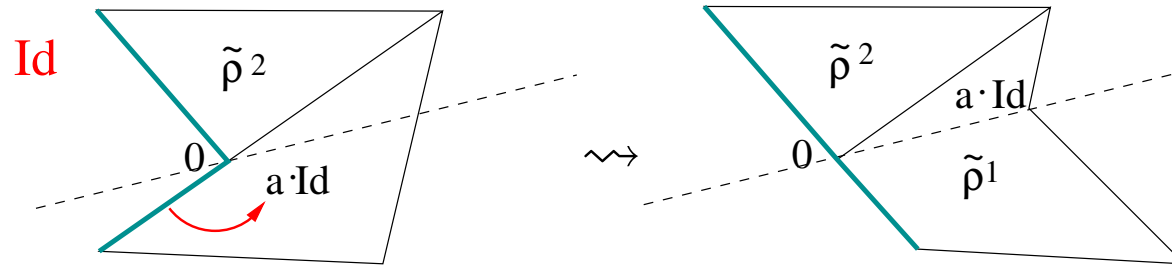
\rightsquigarrow



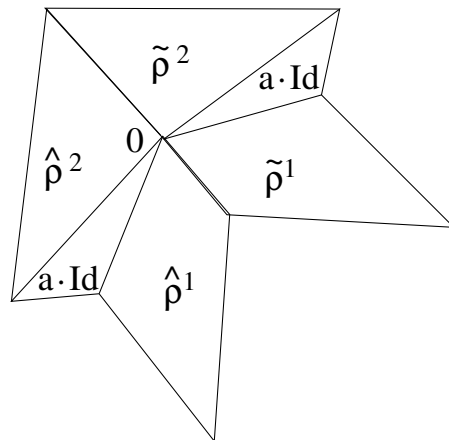
Rappel

La propriété recherchée
 “ $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour un $p > 3$ ”
 est invariante sous des
 transformations bi-Lipschitz

transf. linéaire
 \rightsquigarrow



réflexion
 paire
 \rightsquigarrow



Problème de Dirichlet

A montrer

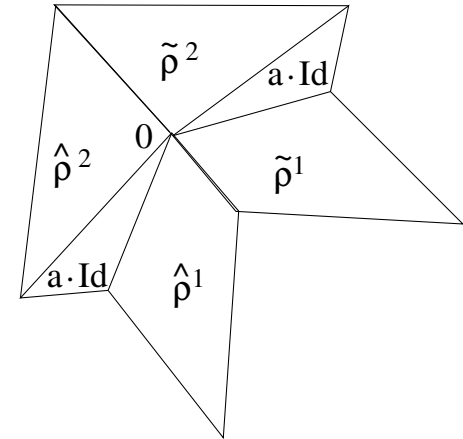
- ▶ Toutes les arêtes satisfont au théorème de MERS, c'est-à-dire
- ▶ Pour l'opérateur correspondant \mathcal{A}_λ on a $\ker(\mathcal{A}_\lambda) = \{0\}$ pour tout $\text{Re}(\lambda) \in]0, 1/3]$.

Comment trouver les valeurs singulières ?

Lemme (Information a priori)

Si λ est une valeur singulière, alors

$$|\operatorname{Im}(\lambda)| \leq \max_j \frac{\rho_{22}^j + \rho_{11}^j}{2\sqrt{\det \rho^j}} \cdot \operatorname{Re}(\lambda).$$



Une équation différentielle (problème de transmission)

Soit $v \in \ker(\mathcal{A}_\lambda)$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} (b_2 v')' + \lambda(b_1 v)' + \lambda b_1 v' + \lambda^2 b_0 v = 0 \quad \text{dans }]\theta_j, \theta_{j+1}[, j = 0, \dots, m-1 \\ [v]_{\theta_j} = 0 \quad \text{et} \quad [b_2 v' + \lambda b_1 v]_{\theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m-1 \\ \text{condition au bord dans } \theta_0, \theta_m \quad (\text{Dirichlet ou Neumann}) \end{array} \right.$$

But

Montrer que pour $\operatorname{Re}(\lambda) \in]0, 1/3]$ il n'y a que la solution nulle.

L'équation transcendante

$$\left\{ \begin{array}{l} (b_2 v')' + \lambda(b_1 v)' + \lambda b_1 v' + \lambda^2 b_0 v = 0 \quad \text{dans }]\theta_j, \theta_{j+1}[, j = 0, \dots, m-1 \\ [v]_{\theta_j} = 0 \quad \text{et} \quad [b_2 v' + \lambda b_1 v]_{\theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m-1 \\ \text{condition au bord dans } \theta_0, \theta_m \quad (\text{Dirichlet ou Neumann}) \end{array} \right.$$

Bonnes nouvelles

- ▶ Un système fondamental est explicitement connu (Costabel, Dauge, Lafranche, 2001)
- ▶ Les conditions de transmission et au bord donnent un système linéaire $2m \times 2m$
- ▶ Ce système linéaire a une solution non-nulle $\iff \lambda$ est une valeur singulière

Mais

L'équation transcendante pour λ , qui en résulte, est très compliquée

Résultat pour quatre secteurs (condition de Neumann)

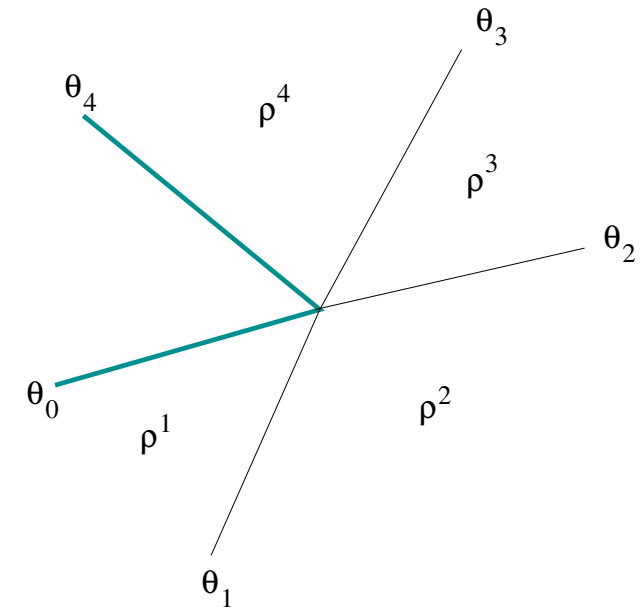
Soit

$$\varsigma_j = \frac{\rho_{22}^j - \rho_{11}^j + 2i\rho_{12}^j}{\rho_{22}^j + \rho_{11}^j + 2\det(\rho^j)^{1/2}}, \quad \kappa_j = \arg \frac{\bar{\varsigma}_j \exp(-2i\theta_j) + 1}{\varsigma_j \exp(-2i\theta_{j-1}) + 1}$$

$$\alpha_j = \theta_j - \theta_{j-1} + \kappa_j, \quad D_j = \det(\rho^j)^{1/2}$$

$$F_N(\lambda) = \exp(i\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) \left(1 - \frac{D_1 - D_2}{D_1 + D_2} \exp(-2i\lambda\alpha_1)\right)$$

$$G_N(\lambda) = \exp(i\lambda(\alpha_3 + \alpha_4)) \left(1 + \frac{D_3 - D_4}{D_3 + D_4} \exp(-2i\lambda\alpha_4)\right)$$



Théorème (HD, Kaiser, Rehberg)

Si dans θ_0 et θ_4 on a une condition de Neumann, alors λ est une valeur singulière, ssi

$$\begin{aligned} \Phi_N(\lambda) := & D_3 [F_N(\lambda) + F_N(-\lambda)] [G_N(\lambda) - G_N(-\lambda)] \\ & + D_2 [F_N(\lambda) - F_N(-\lambda)] [G_N(\lambda) + G_N(-\lambda)] = 0. \end{aligned}$$

Résultat pour quatre secteurs (condition de Dirichlet)

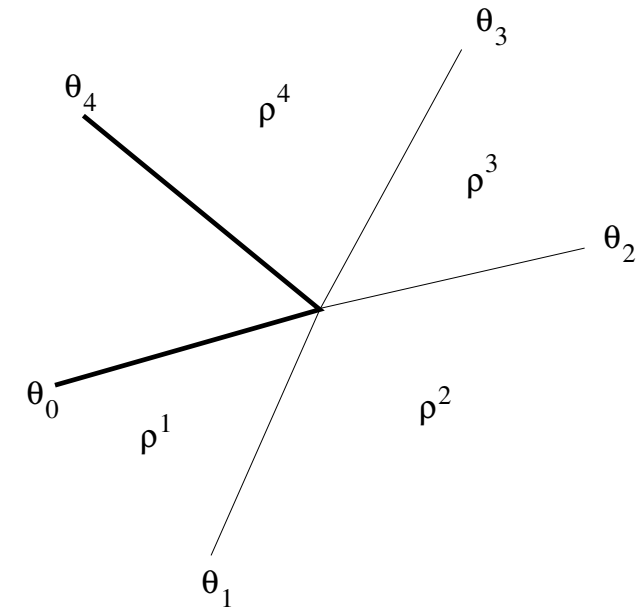
Soit

$$\varsigma_j = \frac{\rho_{22}^j - \rho_{11}^j + 2i\rho_{12}^j}{\rho_{22}^j + \rho_{11}^j + 2\det(\rho^j)^{1/2}}, \quad \kappa_j = \arg \frac{\bar{\varsigma}_j \exp(-2i\theta_j) + 1}{\varsigma_j \exp(-2i\theta_{j-1}) + 1}$$

$$\alpha_j = \theta_j - \theta_{j-1} + \kappa_j, \quad D_j = \det(\rho^j)^{1/2}$$

$$F_D(\lambda) = \exp(i\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) \left(1 + \frac{D_1 - D_2}{D_1 + D_2} \exp(-2i\lambda\alpha_1) \right)$$

$$G_D(\lambda) = \exp(i\lambda(\alpha_3 + \alpha_4)) \left(1 - \frac{D_3 - D_4}{D_3 + D_4} \exp(-2i\lambda\alpha_4) \right)$$



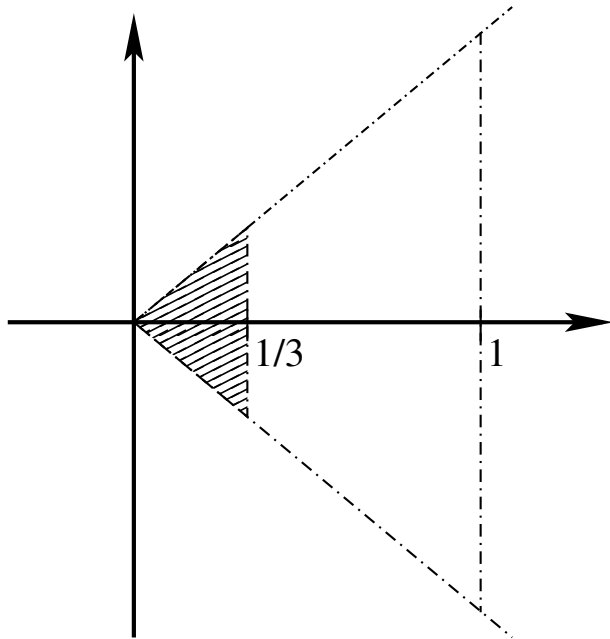
Théorème (HD, Kaiser, Rehberg)

Si dans θ_0 et θ_4 on a une condition de **Dirichlet**, alors λ est une valeur singulière, ssi

$$\begin{aligned} \Phi_D(\lambda) := & D_3 [F_D(\lambda) - F_D(-\lambda)] [G_D(\lambda) + G_D(-\lambda)] \\ & + D_2 [F_D(\lambda) + F_D(-\lambda)] [G_D(\lambda) - G_D(-\lambda)] = 0. \end{aligned}$$

Remarques

- ▶ Résultat pour trois secteurs en posant $\rho_3 = \rho_4$
- ▶ Φ_N est une fonction entière
- ▶ 0 est un zéro simple de Φ_N



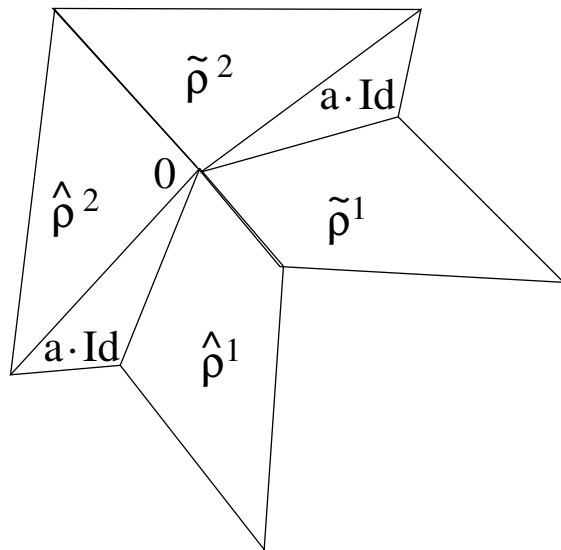
Un grand merci à la symétrie

On a maintenant

L'équation transcendante pour λ pour

- ▶ jusqu'à quatre secteurs et
- ▶ conditions au bord de Dirichlet et de Neumann

L'arête qu'on veut traiter



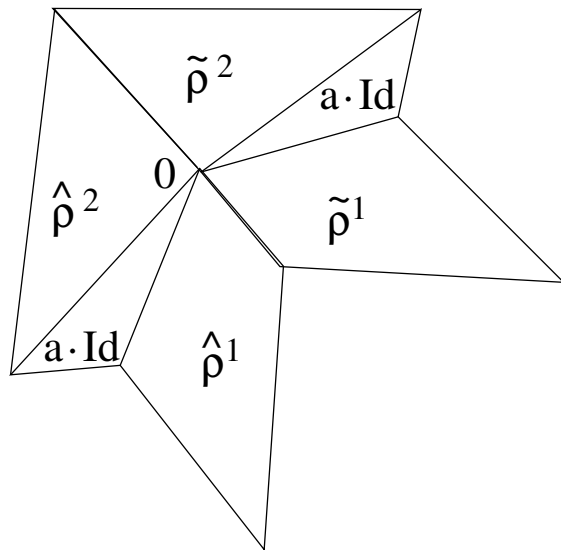
Un grand merci à la symétrie

On a maintenant

L'équation transcendante pour λ pour

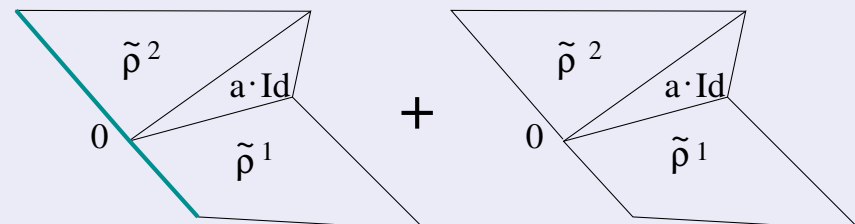
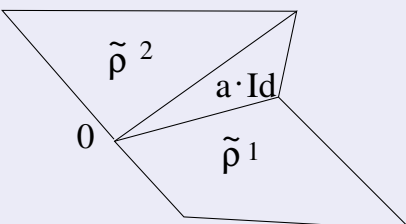
- ▶ jusqu'à quatre secteurs et
- ▶ conditions au bord de Dirichlet et de Neumann

L'arête qu'on veut traiter



Lemme

Si λ n'est pas de valeur singulière pour

 + , alors non plus pour le truc à gauche.

A montrer

Les opérateurs \mathcal{A}_λ correspondants à ces deux problèmes de transmission satisfont à $\ker(\mathcal{A}_\lambda) = \{0\}$ pour tout $\text{Re}(\lambda) \in]0, 1/3]$.

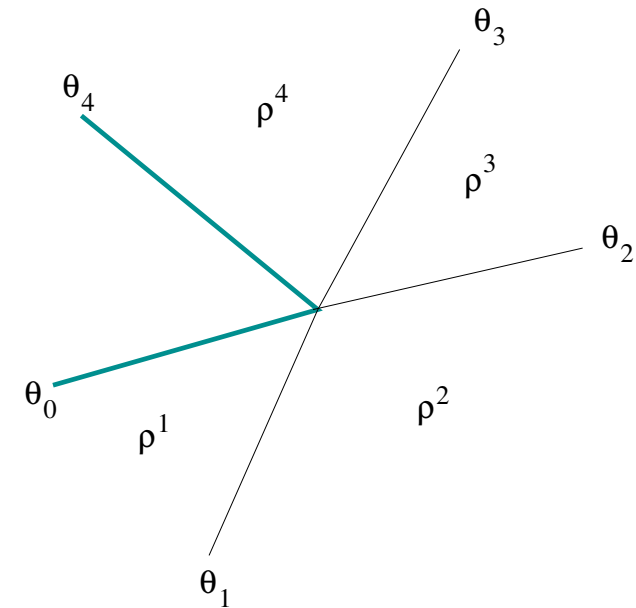
On revient sur l'équation transcendante

$$\varsigma_j = \frac{\rho_{22}^j - \rho_{11}^j + 2i\rho_{12}^j}{\rho_{22}^j + \rho_{11}^j + 2\det(\rho^j)^{1/2}}, \quad \kappa_j = \arg \frac{\bar{\varsigma}_j \exp(-2i\theta_j) + 1}{\bar{\varsigma}_j \exp(-2i\theta_{j-1}) + 1}$$

$$\alpha_j = \theta_j - \theta_{j-1} + \kappa_j, \quad D_j = \det(\rho^j)^{1/2}$$

$$F_N(\lambda) = \exp(i\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) \left(1 - \frac{D_1 - D_2}{D_1 + D_2} \exp(-2i\lambda\alpha_1)\right)$$

$$G_N(\lambda) = \exp(i\lambda(\alpha_3 + \alpha_4)) \left(1 + \frac{D_3 - D_4}{D_3 + D_4} \exp(-2i\lambda\alpha_4)\right)$$



λ est une valeur singulière, ssi

$$\begin{aligned} \Phi_N(\lambda) := & D_3 [F_N(\lambda) + F_N(-\lambda)] [G_N(\lambda) - G_N(-\lambda)] \\ & + D_2 [F_N(\lambda) - F_N(-\lambda)] [G_N(\lambda) + G_N(-\lambda)] = 0. \end{aligned}$$

Lemme

$$\theta_j - \theta_{j-1} \in]0, \pi[\implies \alpha_j \in]0, \pi[$$

$$\theta_j - \theta_{j-1} \in]\pi, 2\pi[\implies \alpha_j \in]\pi, 2\pi[.$$

Cas spéciaux

Quatre secteurs, $D_1 = D_2$ et $D_3 = D_4$

λ valeur singulière \iff

$$D_3 \cot(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) + D_1 \cot(\lambda(\alpha_3 + \alpha_4)) = 0$$

Cela implique

- ▶ Toutes les valeurs singulières sont réelles
- ▶ Tous les secteurs $\leq \pi \implies$ pas de valeurs singulières dans $]0, 1/4 + \varepsilon[$

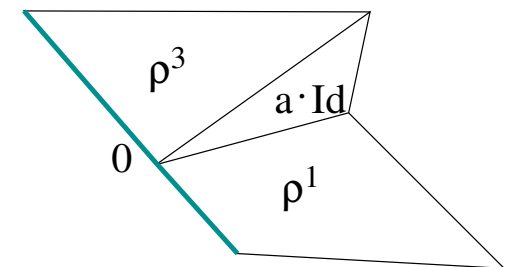
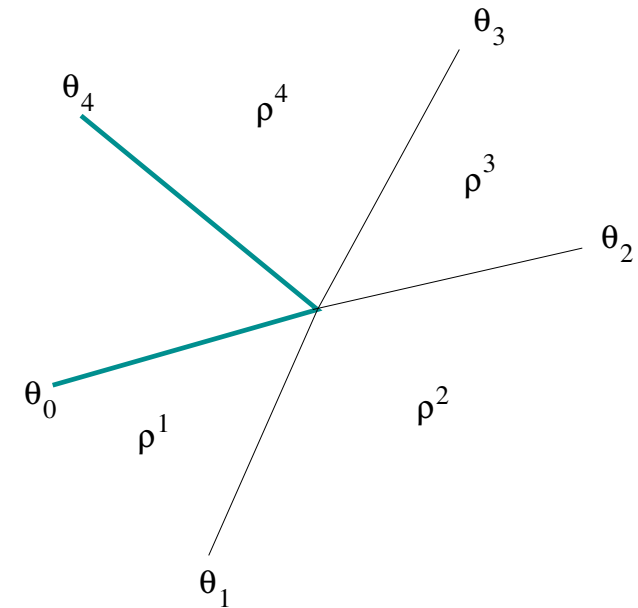
Trois secteurs et $D_1 = D_2$

λ valeur singulière \iff

$$D_3 \cot(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) + D_1 \cot(\lambda\alpha_3) = 0$$

Cela implique

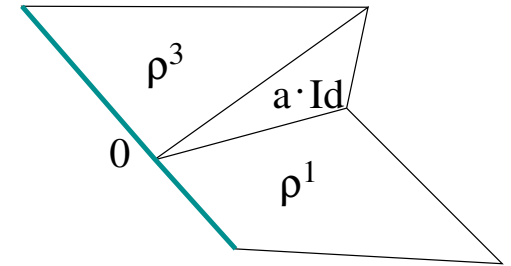
- ▶ Toutes les valeurs singulières sont réelles
- ▶ Tous les secteurs $\leq \pi$, 2^e secteur $< \pi/2$ avec coefficient scalaire \implies pas de valeurs singulières dans $]0, 1/3 + \varepsilon[$



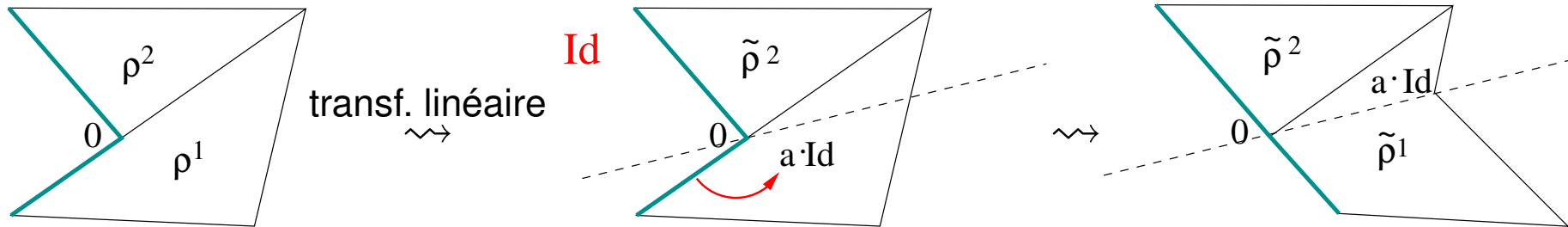
Est-ce qu'on est bien dans cette situation ?

On a besoin de

- ▶ Tous les secteurs $\leq \pi$
- ▶ Deuxième secteur $< \pi/2$
- ▶ $D_1 = D_2$, c.-à.-d. $\det(\rho_1) = \det(\rho_2)$
- ▶ $\rho_2 = a \cdot \text{Id}$



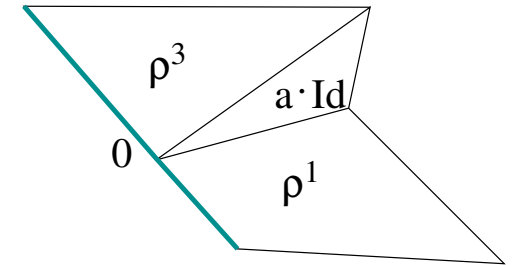
Rappel



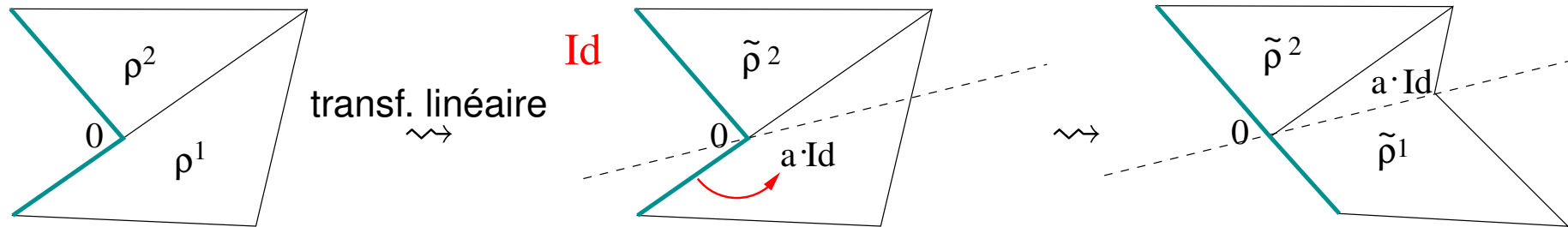
Est-ce qu'on est bien dans cette situation ?

On a besoin de

- ▶ Tous les secteurs $\leq \pi$
- ▶ Deuxième secteur $< \pi/2$
- ▶ $D_1 = D_2$, c.-à.-d. $\det(\rho_1) = \det(\rho_2)$
- ▶ $\rho_2 = a \cdot \text{Id}$



Rappel



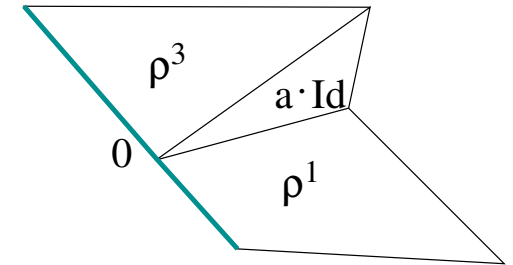
Donc on a

- ▶ Pas de valeur singulière à partie réelle $\leq 1/3$ pour ce problème

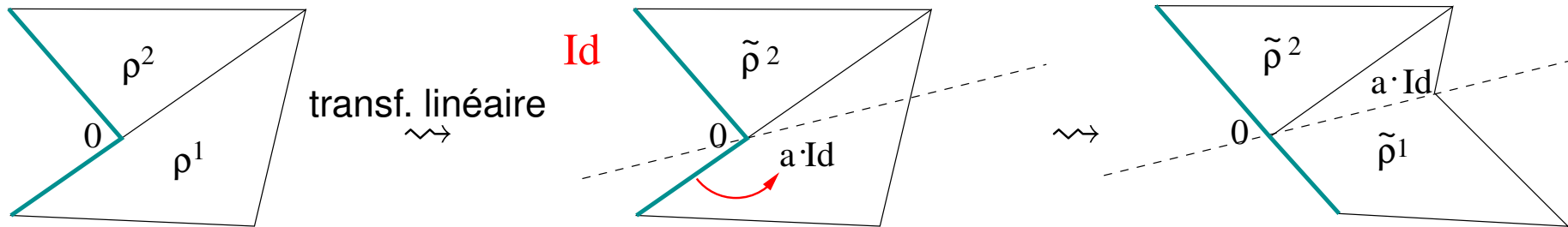
Est-ce qu'on est bien dans cette situation ?

On a besoin de

- ▶ Tous les secteurs $\leq \pi$
- ▶ Deuxième secteur $< \pi/2$
- ▶ $D_1 = D_2$, c.-à.-d. $\det(\rho_1) = \det(\rho_2)$
- ▶ $\rho_2 = a \cdot \text{Id}$



Rappel



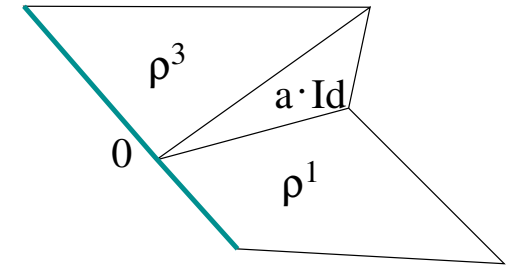
Donc on a

- ▶ Pas de valeur singulière à partie réelle $\leq 1/3$ pour ce problème
- ▶ De même pour le problème à condition de Dirichlet

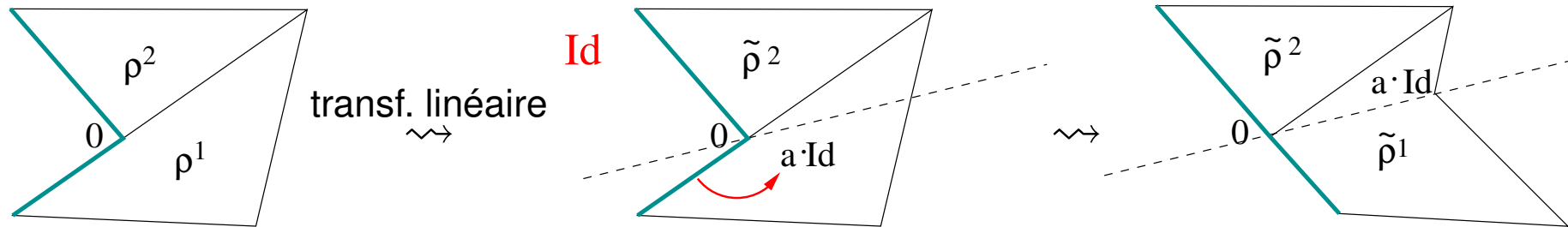
Est-ce qu'on est bien dans cette situation ?

On a besoin de

- ▶ Tous les secteurs $\leq \pi$
- ▶ Deuxième secteur $< \pi/2$
- ▶ $D_1 = D_2$, c.-à.-d. $\det(\rho_1) = \det(\rho_2)$
- ▶ $\rho_2 = a \cdot \text{Id}$



Rappel



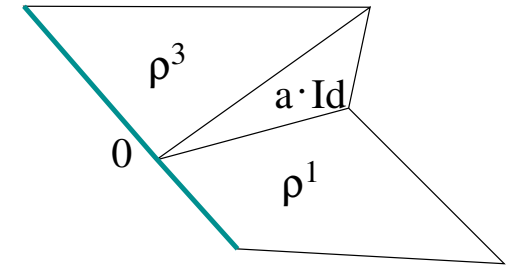
Donc on a

- ▶ Pas de valeur singulière à partie réelle $\leq 1/3$ pour ce problème
- ▶ De même pour le problème à condition de Dirichlet
- ▶ Donc de même pour le problème refleté à six secteurs

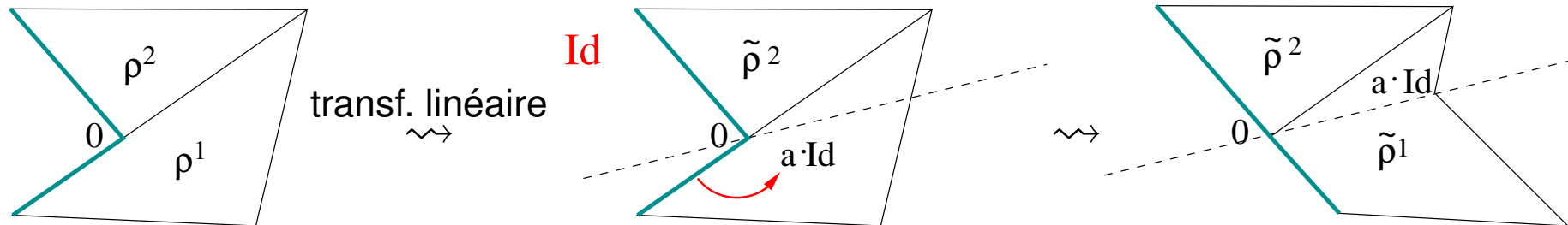
Est-ce qu'on est bien dans cette situation ?

On a besoin de

- ▶ Tous les secteurs $\leq \pi$
- ▶ Deuxième secteur $< \pi/2$
- ▶ $D_1 = D_2$, c.-à.-d. $\det(\rho_1) = \det(\rho_2)$
- ▶ $\rho_2 = a \cdot \text{Id}$



Rappel



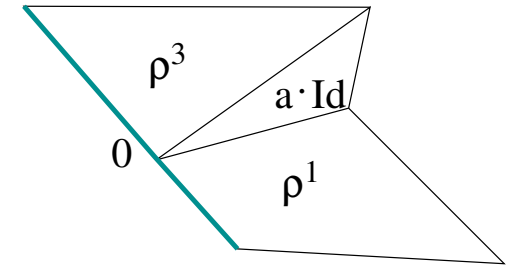
Donc on a

- ▶ Pas de valeur singulière à partie réelle $\leq 1/3$ pour ce problème
- ▶ De même pour le problème à condition de Dirichlet
- ▶ Donc de même pour le problème reflété à six secteurs
- ▶ Donc l'arête satisfait bien au conditions du théorème de MERS

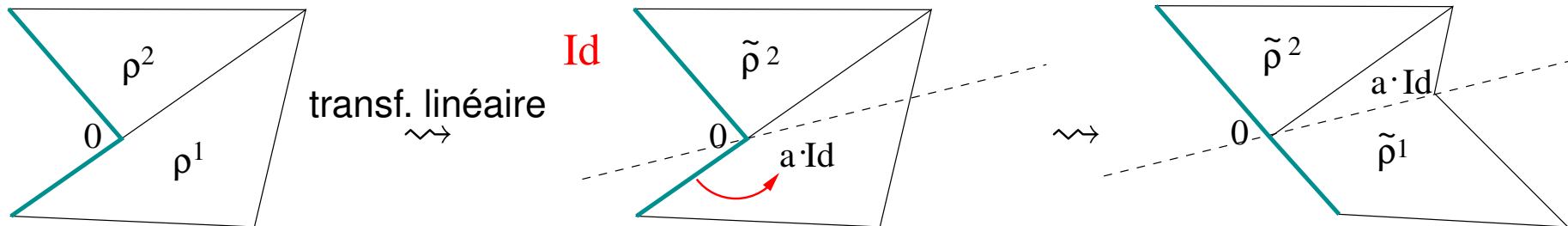
Est-ce qu'on est bien dans cette situation ?

On a besoin de

- ▶ Tous les secteurs $\leq \pi$
- ▶ Deuxième secteur $< \pi/2$
- ▶ $D_1 = D_2$, c.-à.-d. $\det(\rho_1) = \det(\rho_2)$
- ▶ $\rho_2 = a \cdot \text{Id}$



Rappel



Donc on a

- ▶ Pas de valeur singulière à partie réelle $\leq 1/3$ pour ce problème
- ▶ De même pour le problème à condition de Dirichlet
- ▶ Donc de même pour le problème reflété à six secteurs
- ▶ Donc l'arête satisfait bien au conditions du théorème de MERS
- ▶ Solution du problème elliptique dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour un $p > 3$

Le résultat général

Théorème (HD, Kaiser, Rehberg)

Supposons

- ▶ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ polyèdre ouvert avec un coin dans 0
- ▶ Il existe une application linéaire par morceaux, qui aplatit ce coin
- ▶ μ est constant par morceaux sur une décomp. de Ω en polyèdres
- ▶ Toute arête dans $\partial\Omega$ (proche de 0) est une arête géométrique ou une arête à deux matériaux
- ▶ Toute arête dans l'intérieur de Ω est sage (pas de valeurs singulières à partie réelle dans $]0, 1/3[$)

Alors

Il y a un $p > 3$ et un voisinage U de 0, tel que

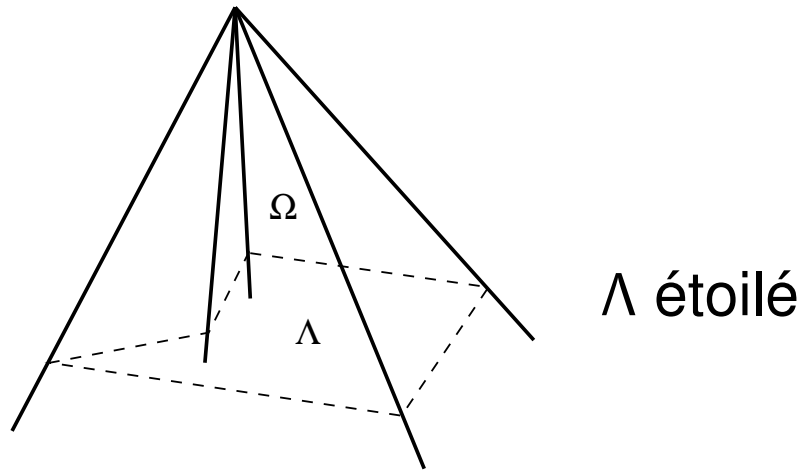
pour tout $f \in (W^{1,p'}(\Omega))'$ la solution de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u + u & = f \\ \mu \nabla u \cdot \nu & = 0 \end{cases}$$

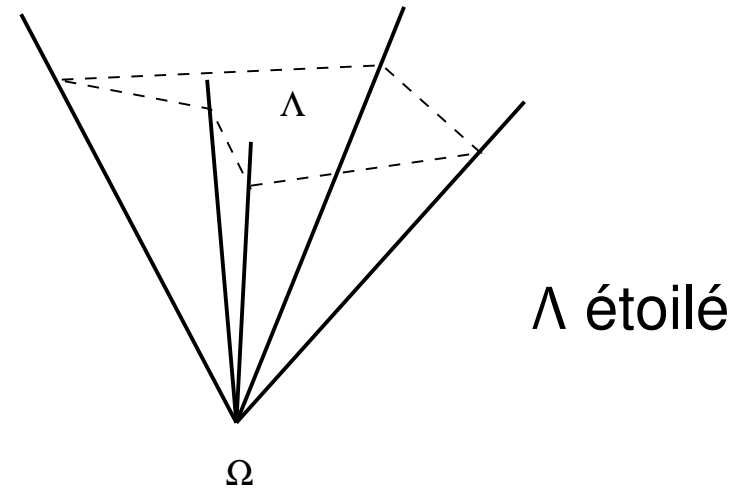
satisfait à $\eta u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $\eta \in C_c^\infty(U)$.

Exemples de coins qui peuvent être aplatis par des applications linéaires par morceaux

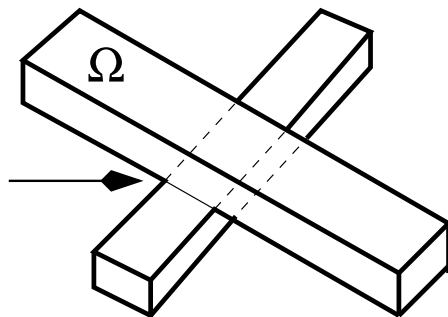
Le coin de pyramide



Le coin Fichera



Les deux barres croisées



Deux prismes

