VISITE DE l'AERES
LAMAV, Mercredi 10 décembre 2008

LA THÉORIE DE LA DÉFORMATION EN GÉOMÉTRIE

par

Aziz El Kacimi

**C'est un thème central sur lequel beaucoup de mathématiciens travaillent actuellement !
Les problèmes y sont nombreux et pas mal d'entre eux restent encore ouverts !
Nous tenterons d'expliquer la participation d'une partie de notre équipe de géométrie dans cette direction.**

LA THÉORIE DE LA DÉFORMATION UTILISE DES OUTILS DE DIVERSES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES : ANALYSE, GÉOMÉTRIE, ALGÈBRE...

1. Déformations d'actions

Soient M une variété différentiable connexe compacte et Diff(M) son groupe de difféomorphismes (de classe C^∞). Alors Diff(M) s'interprète comme le groupe de symétrie de M et est d'un intérêt capital : il permet de transporter les objets géométriques de M, de faire des changements de coordonnées pour, éventuellement, rendre plus facile un calcul, la résolution d'une équation (différentielle, intégrale ou autre) etc.

Soit Γ un groupe dénombrable de présentation finie i.e. ayant un nombre fini de générateurs $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ vérifiant un nombre fini de relations. On appelle *action* de Γ sur M toute représentation injective $\rho : \Gamma \hookrightarrow$ Diff(M).

Le triplet (M, Γ, ρ) est un *système dynamique*. À l'aide de ρ, le groupe abstrait Γ est vu comme groupe de difféomorphismes de M : ses éléments poussent les points de M en respectant un certain nombre de règles dictées par Γ et par ρ.

On dira que l'action ρ est C^r-*rigide* ou C^r-*stable* (avec $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) si, pour toute action ρ' suffisamment proche de ρ (pour la topologie C^∞), il existe un homéomorphisme h de M de classe C^r tel que :

$$h^{-1} \circ \rho' \circ h = \rho.$$

Cela signifie qu'à changement de coordonnées près, les deux systèmes dynamiques (M, Γ, ρ) et (M, Γ, ρ') sont les mêmes du point de vue C^r (on dit qu'ils sont C^r-*conjugués*).

Lorsque le système dynamique n'est pas rigide, on cherche à déterminer ses *déformations*. Cela passe souvent par le calcul de l'espace des *déformations infinitésimales* contenues dans le premier espace de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{X}(M))$ du groupe discret Γ à valeurs dans le module $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M qui est un Γ-module via l'action :

$$(\gamma, X) \in \Gamma \times \mathfrak{X}(M)) \longmapsto \gamma_* X \in \mathfrak{X}(M).$$

Lorsque le groupe Γ est $\mathbb{Z}$ et que l'action ρ est engendrée par un difféomorphisme γ, cet espace n'est rien d'autre que le quotient de $\mathfrak{X}(M)$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $X - \gamma_* X$ avec X variant dans $\mathfrak{X}(M)$.

Restons dans le cas $\Gamma = \mathbb{Z}$ engendré par γ. Une *distribution* sur M est une forme linéaire continue $T : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ (M est compacte). On dira que T est Γ-*invariante* si, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(M)$ on a $\langle T, \varphi \circ \gamma \rangle = \langle T, \varphi \rangle$. L'espace $\mathcal{D}'_\Gamma(M)$ des distributions Γ-invariantes sur M contient les obstructions à la résolution de l'équation cohomologique :

$$f - f \circ \gamma = g$$

(où $g \in C^\infty(M)$ est donnée et $f \in C^\infty(M)$ est l'inconnue qu'on cherche) : pour que cette équation admette une solution, il est nécessaire que $\langle T, g \rangle = 0$ pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'_\Gamma(M)$. (C'est une équation d'une importance capitale en systèmes dynamiques.)

Rappelons que par le procédé de suspension, un système dynamique (M, Γ, ρ) se réalise comme structure transverse d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété compacte de dimension plus grande.

Dans le cas où M est un espace homogène G/H et Γ y agissant par translations les déformations forment un espace de dimension finie. **Cela est démontré de façon précise dans :**

A. El Kacimi, G. Guasp & M. Nicolau. ***On deformations of transversely homogeneous foliations*. Topology, Vol. 40, (2001), 1363-1393.**

Pour un groupe $\Gamma = \mathbb{Z}$ engendré par un difféomorphisme linéaire d'Anosov A sur le tore $\mathbb{T}^n$, l'équation cohomologique $f - f \circ A = g$ a été résolue (et les invariants $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{T}^n)$ et $\mathcal{D}'_\Gamma(\mathbb{T}^n)$ donnés explicitement) dans:

A. Dehghan & A. El Kacimi. ***Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov*. Journal of the Math. Society of Japan, Vol. 59 N 4 (2007), 1105-1134.**

Beaucoup reste encore à faire ! Il est évident que, multiplier l'examen d'exemples concrets, aura beaucoup d'intérêt dans le développement de la théorie.

2. Déformations des réseaux

Soient G un groupe de Lie connexe. On appelle *réseau* de G tout sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ supporte une mesure de probabilité G-invariante. C'est le cas si l'espace homogène G/Γ est compact.

2.1. Définition. ***On dira que Γ est rigide dans G si, pour tout réseau Γ' algébriquement isomorphe à Γ et qui lui est suffisamment proche, il existe $g \in G$ tel que $g^{-1}\Gamma' g = \Gamma$.***

On sait que G agit sur son algèbre de Lie à l'aide de la représentation adjointe $g \in G \longmapsto \mathbf{Ad}(g) \in \mathbf{Aut}(\mathcal{G})$; par restriction on a une action de Γ sur $\mathcal{G}$ qui devient ainsi un Γ-module, ce qui permet de définir la cohomologie $H^*(\Gamma, \mathcal{G})$ du groupe discret Γ à valeurs dans $\mathcal{G}$. Le premier espace $H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ décrit les déformations infinitésimales du réseau Γ dans le groupe G

L'un des premiers résultats marquants de la théorie est le théorème de Weil :

2.2. **Théorème.** *Soient G un groupe de Lie connexe et Γ un réseau. Alors :*

$$\left(H^1(\Gamma,\mathcal{G})=0\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \textbf{ est rigide}\right).$$

• Quelles sont alors les paires (G,Γ) pour lesquelles ceci a lieu ?

Tous les groupes de Lie G semi-simples
non localement isomorphes à **SL**$(2,\mathbb{R})$ et Γ irréductible.

• Qu'en est-il pour les groupes abéliens ? Dans cette situation le quotient G/Γ est compact et :

$$\textbf{rang}(\Gamma)=n=\textbf{dim}(G).$$

En plus, l'action de Γ sur l'algèbre de Lie est triviale et par suite on a :

$$H^1(\Gamma,\mathcal{G})=H^1(\Gamma,\mathbb{R})\otimes\mathcal{G}=\mathbb{R}^n\otimes\mathcal{G}$$

qui n'est bien sûr jamais nul ! De toute façon, comme G n'a aucun automorphisme intérieur non trivial, deux

réseaux ne sont conjugués que s'ils coïncident ! Un réseau se déforme donc toujours !

• À peu de choses près il en est de même pour les groupes nilpotents.

• Mais rien n'est connu pour les groupes résolubles du moins aucun calcul explicite du $H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ n'a été fait jusque ces dernières années où le premier a été mené par Cédric Rousseau dans sa thèse. Je vais dire assez rapidement en quoi cela consiste.

Soient $n \geq 2$ un entier et A une matrice hyperbolique dans SL$(n, \mathbb{Z})$ diagonalisable et ayant toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ positives. Alors A donne une action :

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto A^t x \in \mathbb{R}^n$$

qui permet de définir le produit semi-direct :

$$G = \mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$$

qui est un groupe résoluble non nilpotent et dont :

$$\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}$$

est un réseau cocompact ; le quotient $T_A^{n+1} = G/\Gamma$ est une variété compacte ; plus précisément, c'est un fibré plat au-dessus du cercle $\mathbb{S}^1$ de fibre le tore $\mathbb{T}^n$.

Voici alors un des résultats obtenus par :

C. Rousseau. ***Déformations de réseaux dans certains groupes résolubles*. Journal of the Math. Society of Japan, Vol. 60 N 2 (2008), 397-421.**

2.3. <u>Théorème</u>. ***Notons*** $m_1, \cdots, m_k$ ***les multiplicités respectives des valeurs propres*** $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ ***de la matrice*** A. ***Alors :***

$$\mathbf{dim} H^1(\Gamma, \mathcal{G}) = \left(\sum_{\ell=1}^{k} m_\ell^2 \right) - 1.$$

Il a en plus montré que ces déformations infinitésimales sont réalisées par de vrais réseaux de G qu'il a explicitement exhibés !

Par exemple pour $n = 2$, il y a deux valeurs propres $0 < \lambda < 1 < \frac{1}{\lambda}$ et donc $m_1 = m_2 = 1$. D'où :

$$H^1(\Gamma, \mathcal{G}) = \mathbb{R}.$$