

UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

LICENCE DE MATHÉMATIQUES
Variable complexe

par

AZIZ EL KACIMI

CAHIER D'EXERCICES

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2002-2003

Exercice 1

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On appelle *rayon de convergence* de f le plus grand $R > 0$ tel que, pour $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$. Donner le rayon de convergence de chacune des séries suivantes.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{2n+1} \text{ avec } a \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n.$$

Exercice 2

Donner le développement en série entière des fonctions suivantes. Préciser, pour chacune d'elles, le rayon de convergence.

$$z \mapsto e^z, \quad z \mapsto \operatorname{ch} z, \quad z \mapsto \operatorname{sh} z, \quad z \mapsto \sin z, \quad z \mapsto \cos z.$$

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

$$e^z = 3, \quad e^z = -2, \quad e^z = i, \quad \sin z = 0, \quad \operatorname{sh} z = 0, \quad e^{\frac{z}{1+z}} = 1 - i.$$

Exercice 4

Le corps \mathbb{C} des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même. Mais c'est aussi un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps \mathbb{R} des nombres réels ; les nombres complexes 1 et i en forment une base : tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$; ce qui donne donc un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

1 - Une application \mathbb{C} -linéaire $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est bien sûr \mathbb{R} -linéaire. Mais quelles conditions doit vérifier une application \mathbb{R} -linéaire $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pour qu'elle soit \mathbb{C} -linéaire ?

On munit l'espace vectoriel \mathbb{C} de son produit hermitien $(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mapsto z \overline{z'} \in \mathbb{C}$.

2 - Donner l'équation du cercle (Γ) de centre $z_0 = 2 + i$ et de rayon 2. Le dessiner dans le plan complexe.

3 - Pour tout nombre complexe z , on désigne par $\Re z$ et $\Im z$ respectivement sa partie réelle et sa partie imaginaire. On note \mathbb{H} le demi-espace $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. Dessiner et colorer (en rouge) la région complexe (Δ) de \mathbb{H} définie comme suit.

$$(\Delta) = \left\{ z \in \mathbb{H} : |\Re z| < \frac{1}{2} \text{ et } |z| > 1 \right\}.$$

4 - Quelle est l'image (Δ') de (Δ) par l'application $\Phi : z \in \mathbb{H} \mapsto -\frac{1}{z} \in \mathbb{H}$? Dessiner cette région (Δ') et la colorer (en jaune).

Exercice 5

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On notera R son rayon de convergence qu'on supposera non nul. Sur le cercle $|z| = R$, on ne sait pas en général ce qui se passe : la série peut converger en certains points et diverger en d'autres. Dans certaines situations on sait donner des réponses.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ converge pour tout $z \neq 1$ avec $|z| = 1$. (Utiliser le critère de convergence d'Abel.)

Exercice 6

Soit p un nombre entier naturel non nul. Considérons la série entière $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{np}$.

1 - Montrer que son rayon de convergence est égal à 1.

2 - En quels points du cercle $|z| = 1$ la série f converge-t-elle ?

Exercice 7

Soient p un entier naturel non nul et z_1, \dots, z_p des points sur le cercle (Γ) d'équation $|z| = 1$. Donner un exemple de série entière ayant 1 comme rayon de convergence, divergente sur l'ensemble $\{z_1, \dots, z_p\}$ et convergente en tout autre point de (Γ) .

Exercice 8

Trouver les transformées des figures suivantes par l'application qui au point $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ associe le point $w = \frac{1}{z} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1 - Le cercle $|z - 1| = 1$.

2 - Le cercle $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$.

3 - Le cercle $|z| = r$.

4 - La droite $\Re z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

5 - La famille de toutes les droites parallèles à la première bissectrice.

6 - La famille de toutes les droites passant par un point $z_0 \neq 0$.

7 - Le triangle de sommets les points $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et $z_2 = i$.

Exercice 9

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les 5 premiers termes de son développement en série entière au voisinage de l'origine.

$$f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$$

$$g(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$h(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

$$k(z) = \log(1 + e^z)$$

$$\ell(z) = (\cos z)^{\frac{1}{2}}$$

$$m(z) = \frac{e^z}{e^z + 1}$$

Exercice 10

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout $x_0 \in I$, il existe $r > 0$ tel que l'intervalle ouvert $I_r =]x_0 - r, x_0 + r[$ soit contenu dans I et pour tout $x \in I_r$ on ait un développement en série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

1 - Montrer que toute fonction polynôme $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ est analytique sur \mathbb{R} tout entier.

2 - Montrer que toute fonction analytique $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ .

3 - Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe C^∞ mais qu'elle n'est pas analytique.

Exercice 11

Soient U un ouvert de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 donnée par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On rappelle que l'intégrale de f le long de γ est le nombre complexe

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \{f(\gamma(t)) (x'(t) + iy'(t))\} dt.$$

Soit γ un cercle quelconque de centre z_0 et de rayon $\rho > 0$. Calculer cette intégrale pour les fonctions f suivantes :

(i) - f est un polynôme $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$;

(ii) - $f(z) = \frac{1}{z}$. (Cette situation nécessite une discussion suivant la position de la courbe γ par rapport à l'origine 0.)

Exercice 12

On identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} à l'aide de l'isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $x + iy \in \mathbb{C}$.

Soient U un ouvert de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur U . Alors $f = u + iv$ où u et v sont des fonctions réelles sur U qui sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f ; f peut être vue comme une fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R}^2 :

$$(x, y) \in U \mapsto (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2.$$

Supposons f de classe C^1 . Pour tout point $a \in U$, on note $d_a f$ la différentielle de f en a ; c'est une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{C} dans lui-même.

1 - Supposons que f est holomorphe en a . Montrer alors que l'application \mathbb{R} -linéaire $d_a f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est en fait \mathbb{C} -linéaire.

2 - Montrer que f est holomorphe en a si, et seulement si, les conditions suivantes (dites de Cauchy-Riemann) sont satisfaites :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exercice 13

1 - Montrer que toute fonction polynôme $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ est holomorphe sur le plan complexe tout entier.

2 - Soient ϕ et ψ respectivement les fonctions $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^* \mapsto z\bar{z} \in \mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont de classe C^∞ mais qu'elles ne sont pas holomorphes.

3 - Soit $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $\phi(x + iy) = (ax + by) + i(cx + dy)$ où a, b, c , et d sont des constantes réelles. Quelles conditions doivent satisfaire a, b, c , et d pour que ϕ soit holomorphe ?

4 - On note \mathbb{H} le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ et \mathbb{D} le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Montrer que l'application $\rho : z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{C}$ est une bijection holomorphe de \mathbb{H} sur \mathbb{D} .

5 - Donner explicitement la bijection inverse ρ^{-1} de ρ et montrer qu'elle est aussi holomorphe.

Exercice 15

On note z_0 et z_1 respectivement les points 0 et $1 + i$. Soit γ une courbe d'origine z_0 et d'extrémité z_1 . Calculer la valeur de l'intégrale $\int_\gamma (1 + i - 2\bar{z})dz$ lorsque γ est :

- le segment qui joint z_0 et z_1 ;
- la portion de parabole d'équation $y = x^2$ qui joint z_0 et z_1 ;
- la ligne polygonale $z_0 w z_1$ où $w = 1$.

Exercice 16

Soient f la fonction $f(z) = z^2 + |z|^2$ et γ le demi-cercle $\{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Calculer l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$.

Exercice 17

On prend la branche de \sqrt{z} pour laquelle $\sqrt{1} = -1$. Soient g la fonction $g(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ et γ le demi-cercle $\{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Calculer l'intégrale $\int_\gamma g(z)dz$.

Exercice 18

Soient U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Rappelons d'abord les résultats importants qui suivent.

i) Soit $\sigma : [0, 1] \longrightarrow U$ une courbe fermée C^1 par morceaux. Alors l'intégrale $\int_{\sigma} f(z)dz$ est nulle.

ii) Soient z_0 et z_1 deux points de U et γ une courbe simple C^1 par morceaux d'origine z_0 et d'extrémité z_1 . Alors l'intégrale $\int_{\gamma} f(z)dz$ est indépendante de γ ; elle sera donc notée $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$.

iii) Soit $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une primitive de f (qui existe toujours car U est simplement connexe). On a la formule de Newton-Leibniz :

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

En utilisant la formule de Newton-Leibniz (qu'on vient de donner), Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz \quad \text{et} \quad \int_0^i z \cos z dz.$$

Exercice 19

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} . On dira que U est une *couronne* (centrée en z_0) s'il existe des réels r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 < r_2$ et $U = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

1 - Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que f est analytique sur U i.e. pour tout $z_0 \in U$, il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $z \in D(z_0, \rho)$ (disque ouvert de centre z_0 et de rayon ρ), on ait :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$$

où les f_n sont des nombres complexes qu'on déterminera.

2 - Supposons maintenant que U est une couronne $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Montrer que, pour tout point $z \in U$, $f(z)$ s'écrit :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(z - z_0)^n$$

où les f_n sont des nombres complexes indépendants de z et qu'on déterminera.

Exercice 20

Soient a et c deux réels strictement positifs tels que $a > c$ et F et F' deux points du plan complexe ayant pour affixes respectifs c et $-c$. On appelle *ellipse* de foyers F et F' et de paramètre a l'ensemble (\mathcal{E}) des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$.

1 - Soit $b \in]0, +\infty[$ tel que $a^2 = b^2 + c^2$. Montrer que (\mathcal{E}) est une courbe fermée ayant pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2 - Montrer que (\mathcal{E}) est l'image de $[0, 2\pi]$ par l'application $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à t associe le point d'affixe $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$.

3 - Soit (Γ) le cercle unité, image de $[0, 2\pi]$ par l'application $\sigma : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{it} \in \mathbb{C}$. Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ et $\int_{\sigma} \frac{dz}{z}$ et en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a \cos t)^2 + (b \sin t)^2}.$$

Exercice 21

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ un chemin fermé. On rappelle que l'indice de γ par rapport au point a est le nombre entier :

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $e^{f(t)} = \gamma(t) - a$; on a alors :

$$I(\gamma, a) = \frac{f(1) - f(0)}{2i\pi}.$$

Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins fermés dans \mathbb{C}^* . Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$; on définit ainsi un chemin fermé $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ qu'on appelle *produit* de γ_1 et γ_2 .

1 - Soient $R > 0$ et f une application continue disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ et γ sa restriction au cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Soit a un point qui n'est pas sur l'image de γ et tel que $I(\gamma, a) \neq 0$. Montrer que f prend au moins une fois la valeur a sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$

2 - Montrer que $I(\gamma, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$.

3 - Soient $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ et $\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tels que $|\gamma_1(t)| < |\gamma(t)|$ pour tout $t \in [0, 1]$. Montrer que le chemin $\gamma + \gamma_1$ ne prend jamais la valeur 0 et qu'on a $I(\gamma + \gamma_1, 0) = I(\gamma, 0)$.

Exercice 22

Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Soient $R > 0$ et γ le chemin dans \mathbb{R} , image du cercle $\mathcal{C}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ par l'application continue $z \in \mathcal{C}_R \longmapsto P(z) \in \mathbb{C}$.

1 - Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|z| \geq \alpha$, on ait :

$$|z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0|.$$

2 - Montrer que, pour $R \geq \alpha$, γ ne passe pas par l'origine.

3 - Montrer que, pour $R \geq \alpha$, $I(\gamma, 0) = n$.

4 - En déduire qu'il existe au moins $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$ i.e. le polynôme P admet au moins une racine (théorème de d'Alembert).

Exercice 23

Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Une application $f : U \rightarrow U$ bijective et telle que f et f^{-1} soient holomorphes est appelée *biholomorphisme* ou *automorphisme* de U . Muni de la composition des applications, l'ensemble $\text{Aut}(U)$ des automorphismes de U est un groupe. L'objet de cet exercice est de donner une description explicite des éléments de $\text{Aut}(\mathbb{D})$ où \mathbb{D} est le disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. On aura besoin du :

Lemme de Schwarz. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors :

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

S'il existe $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(z)| = |z|$ ou si $|f'(0)| = 1$ alors f est une rotation i.e. il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta}z$.

Pour tout $a \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on note φ_a et R_θ les applications de \mathbb{D} dans \mathbb{C} définies par :

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{et} \quad R_\theta(z) = e^{i\theta}z.$$

1 - Montrer que φ_a et R_θ sont des automorphismes de \mathbb{D} i.e. des éléments de $\text{Aut}(\mathbb{D})$.

Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. On pose $f(0) = b$ et $g = \varphi_b \circ f$.

2 - Montrer que g est un automorphisme de \mathbb{D} et qu'il fixe 0.

3 - Montrer, en appliquant le lemme de Schwarz à g et à g^{-1} , que $|g'(0)| = 1$.

4 - En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $f = \varphi_a \circ R_\theta$.

Exercice 24

1 - Trouver les zéros des fonctions suivantes et déterminer leurs ordres respectifs.

$$f(z) = 1 + \cos z, \quad g(z) = 1 - e^z, \quad h(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} \quad \text{et} \quad k(z) = (z^2 + 1)\text{sh } z.$$

2 - Déterminer le caractère des points singuliers des fonctions suivantes.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad g(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}, \quad h(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7} \quad \text{et} \quad k(z) = (z - 1)e^{\frac{1}{z-1}}.$$

Exercice 25

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser ses points singuliers et leur nature. Déterminer les résidus de ces fonctions en ces points.

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2}, \quad g(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}, \quad h(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

$$k(z) = \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z}, \quad \ell(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}, \quad m(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}.$$

Exercice 26

Calculer, en utilisant le théorème des résidus, la valeur de chacune des intégrales suivantes.

- $\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 4.
- $\int_{\gamma} \operatorname{tg}(z) dz$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.
- $\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2 + 1} dz$ où γ est le cercle de centre i et de rayon $\frac{3}{2}$.
- En faisant intervenir le résidu à l'infini, calculer la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}$$

où γ est le cercle de centre l'origine et de rayon 2.

Exercice 27

En utilisant le théorème des résidus, calculer les valeurs des intégrales :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx, \quad a > 0$$

et

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + k^2} dx, \quad a > 0 \text{ et } k > 0.$$

Exercice 28

1 - Montrer que :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2 - En utilisant la question qui précède, calculer les intégrales suivantes dites *intégrales de Fresnel* :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$$

Exercice 29

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

Exercice 30

La formule qui suit est intéressante dans les calculs de sommes de séries :

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ où z_1, \dots, z_k sont des complexes qui n'appartiennent pas à \mathbb{Z} . Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|z^2 f(z)| \leq C$ pour $|z|$ assez grand. Alors :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^k \text{Rés} (f(z) \cotg(\pi z), z_j).$$

Soit a un nombre réel non nul. Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Devoir surveillé - novembre 2002

Exercice 1

1 - On considère la fonction d'une variable réelle $f(x) = \ln(1 - x)$. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f . Préciser les valeurs de x pour lesquelles ce développement est valable.

Considérons la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où x est réel et $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

2 - Calculer le rayon de convergence R de la série S .

3 - On pose $g(x) = x^3 S(x)$. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $\frac{g'(x)}{x}$ (g' désigne la dérivée de g).

4 - En déduire l'expression explicite (en termes de fonctions élémentaires bien connues) de la somme de la série S .

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante dans laquelle y représente une fonction réelle de la variable x :

$$xy'' + 3y' - 4x^3y = 0.$$

1 - Montrer qu'il existe une solution unique y de cette équation différentielle donnée sous forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et vérifiant la condition $y(0) = 1$. Calculer explicitement le rayon de convergence R de cette série.

2 - Donner l'expression de y en termes de fonctions élémentaires bien connues.

Exercice 3

Soient $z_0 = x_0 + iy_0$ un point de \mathbb{C} , $n \in \mathbb{Z}$ et f la fonction $f(z) = (z - z_0)^n$. Soit a un réel strictement positif. On pose :

$$z_1 = (x_0 - a) + i(y_0 - a), \quad z_2 = (x_0 + a) + i(y_0 - a)$$

$$z_3 = (x_0 + a) + i(y_0 + a), \quad z_4 = (x_0 - a) + i(y_0 + a)$$

et on note γ la courbe bord du carré $z_1 z_2 z_3 z_4$ orientée positivement *i.e.* les sommets sont dans l'ordre z_1, z_2, z_3, z_4 . Calculer l'intégrale :

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Corrigé

Exercice 1

1 - La fonction $-f$ est la primitive qui s'annule en 0 de $g(x) = \frac{1}{1-x}$; celle-ci admet le développement en série entière :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$; f aura donc un développement en série entière donné comme suit :

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Le rayon de convergence est le même *i.e.* égal à 1. \diamond

2 - On calcule la limite du rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ quand n tend vers l'infini qui est précisément le rayon de convergence R de la série $S(x)$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} = 1.$$

\diamond

3 - On a :

$$g(x) = x^3 S(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

et donc :

$$g'(x) = \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2} + \dots + \frac{x^{n+2}}{n+1} + \dots$$

Par suite :

$$\frac{g'(x)}{x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = -\ln(1-x).$$

D'où :

$$x^3 S(x) = \int_0^x t \ln(1-t) dt.$$

Pour calculer cette intégrale, on procède par intégration par parties en posant $du = t$ et $v = -\ln(1-t)$. Ce qui donne :

$$x^3 S(x) = -\int_0^x t \ln(1-t) dt = \left[-\frac{t^2}{2} \ln(1-t) + \frac{1}{2} \ln(1-t) + \frac{t}{2} \left(1 + \frac{t}{2} \right) \right]_0^x.$$

On obtient finalement :

$$S(x) = \frac{1}{2x^3} \left((1-x^2) \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right).$$

\diamond

Exercice 2

1 - Si une telle solution existe, elle s'écrit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ où $x \in]-R, +R[$ avec $R > 0$, rayon de convergence de cette série entière. Pour tout réel ρ tel que $0 < \rho < R$, la série converge uniformément sur l'intervalle compact $[-\rho, +\rho]$; on peut donc dériver sous le signe somme. On aura alors :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Ce qui donne :

$$xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3na_n x^{n-1} - \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4} x^{n-1}$$

c'est-à-dire :

$$xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3y(x) = 3a_1 + 8a_2x + 15a_3x^2 + \sum_{n=4}^{\infty} (n(n+2)a_n - 4a_{n-4}) x^n.$$

Comme $xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3y(x) = 0$ pour tout $x \in]-R, +R[$, on doit avoir :

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

et

$$n(n+2)a_n - 4a_{n-4} = 0 \quad \text{pour } n \geq 4.$$

D'autre part, la condition initiale $y(0) = 1$ donne $a_0 = 1$. Finalement, les seuls coefficients non nuls de la série sont ceux du type a_{4k} avec $k \in \mathbb{N}$; ceux-là vérifient la relation :

$$a_{4k} = \frac{4a_{4(k-1)}}{4k(k-1)} = \frac{a_{4(k-1)}}{2k(2k+1)} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Après calcul et simplification, on obtient :

$$a_{4k} = \frac{a_0}{(2k+1)!} = \frac{1}{(2k+1)!}.$$

D'où :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(2k+1)!}.$$

Calculons d'abord le rayon de convergence R_0 de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k+1)!}$:

$$R_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (2k+2)(2k+3) = +\infty.$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(2k+1)!}$ est aussi infini. Il y a donc une seule solution y de l'équation différentielle étudiée qui se développe en série entière qui vérifie $y(0) = 1$. \diamond

2 - On a :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\text{sh } x^2}{x^2}.$$

\diamond

Exercice 3

Pour calculer l'intégrale, on fait un changement de variable en posant $w = z - z_0$. Tout sera alors translaté autour de l'origine : on aura à calculer l'intégrale de w^n sur le bord σ du carré dont les sommets sont $w_1 = a(-1 - i)$, $w_2 = a(1 - i)$, $w_3 = a(1 + i)$ et $w_4 = a(-1 + i)$ parcouru dans le sens $w_1 w_2 w_3 w_4$.

Première méthode

Elle consiste à paramétrer σ et à faire directement le calcul de l'intégrale sur les quatre côtés du carré. On a :

$$\int_{\sigma} w^n dw = \int_{-a}^{+a} (x - ia)^n dx + \int_{-a}^{+a} (a + iy)^n idy + \int_{+a}^{-a} (x + ia)^n dx + \int_{+a}^{-a} (-a + iy)^n idy.$$

Pour $n \neq -1$, on a :

$$\int_{\sigma} w^n dw = \frac{1}{n+1} [(t - ia)^{n+1} + (a + it)^{n+1} - (t + ia)^{n+1} - (-a + it)^{n+1}]_{-a}^{+a} = 0.$$

Si $n = -1$, on a :

$$\int_{\sigma} w^n dw = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{x - ia} dx + \int_{-a}^{+a} \frac{1}{a + iy} idy + \int_{+a}^{-a} \frac{1}{x + ia} dx + \int_{+a}^{-a} \frac{1}{-a + iy} idy$$

qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} w^n dw &= \int_{-a}^{+a} \left(\frac{1}{t - ia} - \frac{1}{t + ia} \right) dt + \int_{-a}^{+a} \left(\frac{1}{t - ia} - \frac{1}{t + ia} \right) dt \\ &= 4ia \int_{-a}^{+a} \frac{dt}{t^2 + a^2} \\ &= 2i\pi. \end{aligned}$$

Deuxième méthode

Le chemin σ peut être paramétré par l'angle $2\pi t = \text{argument de } \sigma(t)$ (avec $t \in [0, 1]$) de façon différentiable par morceaux (il est conseillé de faire cet exercice). Ainsi paramétré, σ est homotope au chemin fermé $\eta : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t}$ par l'application (clairement continue) $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ donnée par :

$$H(t, s) = (1 - s)\sigma(t) + s\eta(t).$$

Par suite :

$$\int_{\sigma} w^n dw = \int_{\eta} w^n dw = 2i\pi \int_0^1 e^{2i\pi(n+1)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1 \end{cases}.$$

Examen de deuxième session - avril 2003

Exercice 1

Soient r et R deux nombres réels tels que $0 < r < R$ et D la demi-couronne fermée du plan complexe $\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R \text{ et } \Im z \geq 0\}$. On note Γ le bord de D orienté en passant successivement par les points $r, R, -R$ et $-r$ et Γ' et Γ'' les parties de Γ contenues dans les cercles centrés à l'origine et de rayons respectifs r et R . Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3iz}}{z^3}.$$

- 1 - Calculer l'intégrale de f le long de Γ .
- 2 - Montrer que l'intégrale de f le long de Γ'' tend vers 0 quand R tend vers l'infini.
- 3 - Quel est le résidu de f à l'origine ? En déduire la limite de l'intégrale de f le long de Γ' lorsque r tend vers 0.
- 4 - En utilisant ce qui précède, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{x^3} dx.$$

Exercice 2

Pour tout $w \in \mathbb{C}$, $\Re w$ désignera sa partie réelle ; on note $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert de \mathbb{C} et $\bar{\Delta}$ son adhérence. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant $\bar{\Delta}$. On définit les fonctions $A, M : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{et} \quad A(r) = \sup_{|z|=r} \Re f(z).$$

- 1 - Montrer, en utilisant le principe du maximum, que la fonction M est croissante et qu'elle est strictement croissante si f n'est pas constante.
- 2 - Montrer que, pour tout $r \in [0, 1]$, on a :

$$A(r) = \log \left(\sup_{|z|=r} |e^{f(z)}| \right).$$

En déduire que la fonction A est croissante et qu'elle est strictement croissante si f n'est pas constante.

- 3 - On suppose que f n'est pas constante et que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction définie par $g(z) = \frac{f(z)}{2A(1)-f(z)}$ est holomorphe sur Δ et qu'elle vérifie $|g(z)| < 1$ pour tout $z \in \Delta$. En déduire, en utilisant le lemme de Schwarz que, pour tout $r \in [0, 1]$, on a :

$$M(r) \leq \frac{2r}{1-r} A(1).$$