# NOTE SUR CERTAINES ÉQUATIONS COHOMOLOGIQUES HOLOMORPHES

par

Aziz EL KACIMI ALAOUI

(Juillet 2008)

**Résumé**. Soient $\Sigma$ une surface de Riemann non compacte et $\gamma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ un automorphisme libre et propre et tel que la surface de Riemann $M = \Sigma/\gamma$ soit non compacte. En utilisant le fait que $\Sigma$ et $M$ sont de Stein, on montre que, pour toute fonction holomorphe $g : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe une fonction holomorphe $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ solution de l'équation cohomologique $f \circ \gamma - \lambda f = g$.

## 1. Préliminaires

Soit $E$ un espace de Fréchet complexe dont la topologie est définie par une famille séparante de semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On se donne un opérateur continu $T : E \longrightarrow E$ (*i.e.* une application linéaire continue). On dira que $T$ est *inversible* s'il existe un opérateur continu $S : E \longrightarrow E$ tel que $ST = TS = I$ ($I$ est l'identité de $E$).

**1.1.** On appelle *valeur spectrale* de $T$ tout nombre complexe $\lambda$ tel que l'opérateur $T - \lambda I$ ne soit pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales de $T$ est le *spectre* de $T$ ; on le note $\sigma(T)$. Si $E$ est un Banach, $\sigma(T)$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$ contenue dans le disque $D(0, |||T|||)$ où $|||T|||$ est la norme de l'opérateur $T$. Ce qui n'est pas toujours le cas sur un Fréchet quelconque.

**1.2.** On appelle *valeur propre* de $T$ tout nombre complexe $\lambda$ tel que l'opérateur $T - \lambda I$ ne soit pas injectif. Tout vecteur $x$ non nul de $E$ qui vérifie $Tx = \lambda x$ est appelé *vecteur propre* associé à la valeur propre $\lambda$. Bien sûr, toute valeur propre est une valeur spectrale.

**1.3. Le problème**

Soient $\Sigma$ une surface de Riemann non compacte et $\mathcal{H}(\Sigma)$ l'espace des fonctions holomorphes $\Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit $(C_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de compacts de réunion $\Sigma$. Pour $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$, on pose $p_n(f) = \sup_{z\in C_n} |f(z)|$. On obtient ainsi une semi-norme sur $\mathcal{H}(\Sigma)$. La famille $(p_n)_{n\geq 0}$ définit une distance $\delta(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf (1, p_n(f - g))$ invariante par translation sur $\mathcal{H}(\Sigma)$ et qui en fait un espace de Fréchet. Soit $\gamma$ un automorphisme de $\Sigma$. Alors $\gamma$ définit un *opérateur de composition* : $f \in \mathcal{H}(\Sigma) \xmapsto{T} f \circ \gamma \in \mathcal{H}(\Sigma)$ sur l'espace de Fréchet $\mathcal{H}(\Sigma)$. C'est un automorphisme topologique de $\mathcal{H}(\Sigma)$ et donc $\lambda = 0$ est une valeur régulière de $T$. Une question se pose naturellement : *quelles sont les valeurs* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *qui constituent le spectre* $\sigma(T)$ *de* $T$ *? Les opérateurs* $T - \lambda I$ *sont-ils surjectifs ?* A priori la

---

*Mathematics Subject Classification* : 30D05

*Key Words* : Équation cohomologique, fibré holomorphe, spectre

réponse à cette dernière question n'est pas si évidente mais nous allons voir qu'une simple remarque sur la cohomologie d'une variété de Stein à valeurs dans un faisceau analytique cohérent permet de donner presque immédiatement la réponse. L'objet de cette note est de démontrer le :

**1.4. Théorème.** *Soient $\Sigma$ une surface de Riemann non compacte et $\gamma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ un automorphisme agissant de façon libre et propre et tel que la surface de Riemann $M = \Sigma/\gamma$ soit non compacte. Alors :*

*i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $T - \lambda I$ est surjectif i.e. l'équation cohomologique $Tf - \lambda f = g$ admet une solution $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$ pour toute donnée $g \in \mathcal{H}(\Sigma)$.*

*ii) On suppose $\Sigma$ simplement connexe. Alors tout nombre complexe $\lambda$ non nul est valeur propre de l'opérateur de composition $T$ induit par $\gamma$ sur $\mathcal{H}(\Sigma)$. Le sous-espace propre $\mathcal{H}_\lambda(\Sigma)$ associé à $\lambda$ est isomorphe à $\mathcal{H}(M)$.*

Si on pose $\Sigma = \mathbb{C}$, $\gamma(z) = z + 1$ et $\lambda = 1$, on récupère le théorème de Guichard [Gu].

Le paragraphe qui suit sera consacré à la démonstration de ce théorème. Celle-ci va nécessiter l'introduction de quelques ingrédients géométriques sur les surfaces de Riemann.

## 2. Démonstration du théorème

On rappelle que $\Sigma$ est non compacte et que le groupe $\Gamma$ engendré par $\gamma$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Le quotient $M = \Sigma/\gamma$ est alors une surface de Riemann (non compacte par hypothèse) et la projection canonique $\pi : \Sigma \longrightarrow M$ est un revêtement holomorphe de groupe $\mathbb{Z}$. Les surfaces de Riemann $\Sigma$ et $M$ sont des variétés de Stein.

Pout $\lambda = 0$ la situation est immédiate : $T$ est un automorphisme topologique de l'espace de Fréchet $\mathcal{H}(\Sigma)$ *i.e.* 0 est une valeur régulière. Désormais, nous supposerons $\lambda \neq 0$.

### 2.1. Surjectivité des $T - \lambda I$

• On commence d'abord par rappeler une méthode de calcul cohomologique qui sera un ingrédient essentiel dans la démonstration ; dans sa généralité, elle concerne les revêtements entre espaces topologiques quelconques mais nous nous limiterons au cas des revêtements holomorphes entre variétś complexes.

Soient $\widetilde{M}$ une variété complexe muni d'une action holomorphe d'un groupe discret (dénombrable) qu'on supposera, pour simplifier, de présentation finie. Si l'action de $\Gamma$ est propre et libre le quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ est une variété complexe ; la projection canonique $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ est un revêtement galoisien holomorphe. On se donne un fibré vectoriel complexe $\widetilde{E} \longrightarrow \widetilde{M}$ sur lequel le groupe $\Gamma$ agit holomorphiquement. On suppose que $\widetilde{E}$ induit un fibré complexe sur $M$ de telle sorte que $\pi^*(E) = \widetilde{E}$. Alors $\Gamma$ agit sur l'espace $\mathcal{H}(\widetilde{E})$ des sections holomorphes du fibré $\widetilde{E}$ :

$$(\gamma, \sigma) \in \Gamma \times \mathcal{H}(\widetilde{E}) \longmapsto \gamma \cdot \sigma \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$$

qui devient ainsi un $\Gamma$-module. L'espace $\mathcal{H}_\Gamma(\widetilde{E})$ des sections de $\mathcal{H}\widetilde{E})$ invariantes par $\Gamma$ s'identifie canoniquement à l'espace $\mathcal{H}(E)$ des sections holomorphes de $E$. On désigne par $\widetilde{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E}$ les faisceaux des germes respectivement sur $\widetilde{M}$ et $M$ et associés à $\widetilde{E}$ et $E$. L'image directe $\pi_*(\widetilde{\mathcal{E}})$ par l'application $\pi$ du faisceau $\widetilde{\mathcal{E}}$ n'est rien d'autre que le faisceau $\mathcal{E}$. Il existe alors une suite spectrale $E_r$ dont le terme $E_2$ est donné par :

$$E_2^{k\ell} = H^k(\Gamma, H^\ell(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{E}}))$$

et convergeant vers $H^*(M, \mathcal{E})$. (Cette suite spectrale résulte de la théorie des foncteurs dérivés de Grothendieck [Gr]. On peut en trouver un exposé dans [Br].) Si $\widetilde{M}$ est acyclique *i.e.* :

$$H^\ell(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{E}}) = \begin{cases} \mathcal{H}(\widetilde{E}) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases}$$

la suite $E_r$ converge au terme $E_2$ et on a $H^k(M, \mathcal{E}) = H^k(\Gamma, \mathcal{H}(\widetilde{E}))$. Lorsque le groupe $\Gamma$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et est engendré par un élément $\gamma$, tous les groupes de cohomologie $H^k(\Gamma, \mathcal{H}(\widetilde{E}))$ sont nuls pour $k \geq 2$, $H^0(\Gamma, \mathcal{H}(\widetilde{E})) = \mathcal{H}_\Gamma(\widetilde{E})$ et $H^1(\Gamma, \mathcal{H}(\widetilde{E})) = \mathcal{H}(\widetilde{E})/\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est le sous-espace de $\mathcal{H}(\widetilde{E})$ engendré par les éléments de la forme $\sigma - \gamma \cdot \sigma$ avec $\sigma \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$. Ce qui introduit de façon naturelle l'équation cohomologique discrète $\sigma - \gamma \cdot \sigma = \alpha$ dans l'espace $\mathcal{H}(\widetilde{E})$.

• On pose $\widetilde{E} = \Sigma \times \mathbb{C}$ ; $\widetilde{E}$ est le fibré en droites holomorphe trivial au-dessus de $\Sigma$ ; Soit $\rho$ le morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\widetilde{E})$ (groupe des automorphismes de $\widetilde{E}$) qui à 1 associe $\rho \in \mathrm{Aut}(\widetilde{E})$ défini par $\rho(z, \sigma) = (\gamma(z), u(\sigma))$ où $u(\sigma) = \lambda\sigma$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Le quotient $E = \widetilde{E}/\rho$ est un fibré en droites complexes holomorphes au-dessus de $M$. C'est un fibré plat de monodromie $\sigma \in \mathbb{C} \longmapsto \lambda\sigma \in \mathbb{C}$.

On s'intéresse à la cohomologie du groupe $\mathbb{Z}$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}(\widetilde{E})$ des sections holomorphes du fibré $\widetilde{E}$ ; l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{H}(\widetilde{E})$ est induite par $\rho$ :

$$(\rho \cdot \sigma)(z) = u(\sigma(\gamma^{-1}z)) = \lambda\sigma(\gamma^{-1}z).$$

Comme $\widetilde{E}$ est trivial, $\mathcal{H}(\widetilde{E})$ est un $\mathcal{H}(\Sigma)$-module libre de base la section $\sigma_0$ constante qui à $z \in \Sigma$ associe le vecteur 1. Ainsi, toute section $\sigma \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$ s'écrit $\sigma(z) = f(z)\sigma_0$ où $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$. L'action de $\rho$ sur $\mathcal{H}(\widetilde{E})$ s'écrit alors, sur $\sigma = f\sigma_0$ :

$$(\rho \cdot \sigma)(z) = \lambda f(\gamma^{-1}z)\sigma_0.$$

• On a $H^0(\mathbb{Z}, \mathcal{H}(\widetilde{E})) = \{\text{sections } \rho\text{-invariantes}\}$ ; $f\sigma_0 \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$ est $\rho$-invarainte si, et seulement si, on a $\lambda f(\gamma^{-1}z) = f(z)$. Ceci signifie que $\lambda$ est une valeur propre de l'opérateur de composition $T : f \in \mathcal{H}(\Sigma) \longmapsto f \circ \gamma \in \mathcal{H}(\Sigma)$ dont $f$ est un vecteur propre *i.e.* $f \circ \gamma = \lambda f$. L'espace $H^0(\mathbb{Z}, \mathcal{H}(\widetilde{E}))$ est donc "constitué" des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda$ de l'opérateur $T$.

• Rappelons que $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}(\widetilde{E}))$ est le quotient de $\mathcal{H}(\widetilde{E})$ par le sous-espace des éléments de la forme $\rho{\cdot}\sigma - \sigma$. Son calcul se ramème à la résolution dans $\mathcal{H}(\widetilde{E})$ de l'équation $\rho{\cdot}\sigma - \sigma = \xi$ *i.e.* à l'équation $\frac{f(\gamma z)}{\lambda} - f(z) = h(z)$ dans $\mathcal{H}(\Sigma)$ ou encore à $f(\gamma z) - \lambda f(z) = g(z)$ avec $g \in \mathcal{H}(\Sigma)$ donnée. On voit donc que l'opérateur $T - \lambda I$ sera surjectif si $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}(\widetilde{E}))$ est trivial. Il le sera !

Notons $\widetilde{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E}$ les faisceaux des germes de sections holomorphes respectivement des fibrés $\widetilde{E}$ et $E$. Ce sont des faisceaux analytiques cohérents (*cf.* [Hö]) respectivement sur les variétés de Stein $\Sigma$ et $M$. On a donc (*cf.* [Hö]) :

$$H^1(\Sigma, \widetilde{\mathcal{E}}) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(M, \mathcal{E}) = 0.$$

Rappelons qu'on a un revêtement holomorphe $\pi : \Sigma \longrightarrow M$ de groupe $\mathbb{Z}$ et que l'image directe $\pi_*(\widetilde{\mathcal{E}})$ par $\pi$ du faisceau $\widetilde{\mathcal{E}}$ n'est rien d'autre que le faisceau $\mathcal{E}$. Comme $(\Sigma, \widetilde{\mathcal{E}})$ est acyclique, la suite spectrale du revêtement $\pi : \Sigma \longrightarrow M$ nous donne :

$$H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}(\widetilde{E})) = H^1(M, \mathcal{E}) = 0.$$

## 2.2. Valeurs propres et sous-espaces propres

Comme $\Sigma$ est non compacte et simplement connexe, elle est biholomorphiquement équivalente soit au plan complexe $\mathbb{C}$ soit au disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Nous travaillerons donc sur ces deux modèles. Dans les deux cas, la surface de Rimann quotient $M = \Sigma/\gamma$ est non compacte (elle est difféomorphe à $\mathbb{C}^*$).

**Cas où $\Sigma = \mathbb{C}$**

Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ des automorphismes de la surface de Riemann $\mathbb{C}$ est le produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ où $\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{C}$ par multiplication $(a, z) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \longmapsto az \in \mathbb{C}$. De façon plus précise $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $\gamma(z) = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ sont des constantes. Si on demande à $\gamma$ de ne fixer aucun point, il est nécessairement de la forme $\gamma(z) = z + b$. Dans ce cas, l'opérateur de composition $T$ associé transforme $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ en $Tf \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ donnée par $Tf(z) = f(z + b)$. Tout nombre complexe non nul $\lambda = e^{\xi b}$ (avec $\xi \in \mathbb{C}$) est valeur propre de $T$ ; un vecteur propre associé est $e_\xi(z) = e^{\xi z}$. D'où $\sigma(T) = \mathbb{C}^*$ dont tous les éléments sont des valeurs propres. Tout autre vecteur propre associé à $\lambda$ est une fonction holomorphe $\phi$ de la forme $\phi(z) = h(z)e^{\xi z}$ où $h$ est une fonction holomorphe $\gamma$-invariante *i.e.* vérifiant $h(z + b) = h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui sont $\gamma$-invariantes s'identifient canoniquement aux fonctions holomorphes sur la surface de Riemann quotient $\mathbb{C}/\gamma$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

**Cas où $\Sigma = \mathbb{D}$ disque unité**

Le disque unité $\Sigma = \mathbb{D}$ est holomorphiquement équivalent au demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ et il est plus simple de travailler sur ce dernier.

Tout automorphisme $\gamma$ de $\mathbb{H}$ est de la forme $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Si $\gamma$ n'a pas de point fixe, il est nécerairement une translation $z \longmapsto z + b$ où $b \in \mathbb{R}$ (on dira que $\gamma$ est *parabolique*) ou du type $z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ (on dira que $\gamma$ est *hyperbolique*). Lorsque $\gamma$ est parabolique, on démontre, comme pour le cas de $\mathbb{C}$, que tout nombre complexe non nul $\lambda = e^{\xi b}$ (avec $\xi \in \mathbb{C}$) est valeur propre de l'opérateur de composition $T$ ; un vecteur propre associé est vecteur propre $e_\xi(z) = e^{\xi z}$. Tout autre vecteur propre associé à $\lambda$ est une fonction holomorphe $\phi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forme $\phi(z) = h(z)e^{\xi z}$ où $h : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe $\gamma$-invariante *i.e.* vérifiant $h(z + b) = h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{H}$.

Supposons $\gamma$ hyperbolique de la forme $\gamma(z) = az$ avec $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. (On dira aussi que $\gamma$ est une *loxodromie.*) Il est alors immédiat de voir que tout $\lambda = a^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) est valeur propre de $T$ associée au vecteur propre $e_n(z) = z^n$.

Rappelons que pour définir la fonction logarithme complexe, on procède à une coupure du plan $\mathbb{C}$. Sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{w = u + iv : v = 0 \text{ et } u \geq 0\}$ elle est définie par :

$$\mathrm{Log}(w) = \mathrm{Log}(|w|) + i\mathrm{arg}(w).$$

On peut remarquer que la quantité $w' = \mathrm{Log}(w)$ reste dans l'ouvert $\Omega$. Nous allons utiliser cela pour construire des vecteurs propres associés aux nombres $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Suposons $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors la fonction $w \in \mathbb{H} \longrightarrow \lambda^w$ est bien définie et donc la fonction $\psi(z) = \lambda^{\theta(z)}$ où $\theta(z) = \frac{\mathrm{Log}(z)}{\mathrm{Log}(a)}$ est aussi bien définie pour tout $z \in \mathbb{H}$ et est holomorphe. Un calcul simple montre que $T\psi = \lambda\psi$ *i.e.* $\psi$ est un vecteur propre associé à la valeur propore $\lambda$. Tout autre vecteur propre (associé à la valeur propore $\lambda$) $\Psi$ est de la forme $\Psi(z) = h(z)\psi(z)$ où $h : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction $\gamma$-invariante *i.e.* vérifiant $h(az) = h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{H}$ ; c'est une fonction holomorphe sur la surface de Riemann quotient $M = \mathbb{H}/\gamma$. □

# Références


[Br] Brown, K.S. *Cohomology of Groups.* GTM Vol. 87, Springer-Verlag (1982).

[Gr] Grothendieck, A. *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohoku Math. J. Vol. 9 (1957) 119-221.

[Gu] Guichard, C. *Sur la résolution de l'équation aux différences finies* $G(x+1) - G(x) = H(x)$. Ann. Sc. ENS Série 3, 4 (1887) 361-380.

[Hö] Hörmander, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* D. Van Nostrand Compagny. Inc. (1966).



Aziz El Kacimi Alaoui
LAMAV, FR du CNRS 2956
ISTV 2, Le Mont Houy
Université de Valenciennes
59313 Valenciennes Cedex 9 – France
*Cité des Géométries de Maubeuge*

aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr