

MOUVEMENTS EUCLIDIENS ET PAVAGES

AZIZ EL KACIMI

Université de Valenciennes

Cité des Géométries de Maubeuge

Exposé :

Université Hassan II, Casablanca le 11 décembre 2009

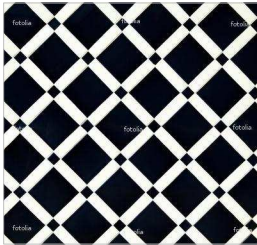
Journées **JEUNES ET SCIENCES**

Lycée Louis Legrand, Paris le 24 octobre 2010

100 ANS APMEP

Collège Turgot, Denain le 18 février 2011

Préparation Exposition **RÉFLEXIONS-RÉFLEXIONS**







Mosquée Hassan 2 à Casablanca

0. Préliminaires

Le thème des frises et des pavages a beaucoup intéressé les géomètres, les artistes, les artisans... à travers la symétrie et la beauté des objets dont il fait usage. Il est très ancien et de caractère universel ; il a tenu une place centrale dans le développement de beaucoup de civilisations : les décors somptueux qu'on peut admirer par exemple au Palais de l'Alhambra à Grenade (Espagne) montrent à quel point l'art islamique a été à la fois précurseur, bâtisseur et porteur d'excellence dans ce domaine.

Les symétries d'un pavage sont des mouvements qui consistent à pousser, faire tourner, renverser, mais tout en préservant le décor. Elles se composent et donnent lieu à de nouvelles symétries ; on dira qu'elles forment un groupe d'isométries. La classification de ce type de groupes est maintenant établie : il y a exactement 7 symétries pour les frises et 17 groupes paveurs ! On sait aussi que les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone !

L'objet de cet atelier est de montrer, de façon très élémentaire, que pour un quadrilatère, la condition de régularité n'est pas exigée : tout quadrilatère convexe pave le plan de façon périodique i.e. il existe deux directions différentes du plan dans lesquelles le décor se répète de façon constante !

NOUS NOUS LIMITERONS AUX PAVAGES !

Les symétries d'un pavage sont des mouvements qui consistent à pousser, faire tourner, renverser, mais tout en préservant le décor. Elles se composent et donnent lieu à de nouvelles symétries ; on dira qu'elles forment un groupe d'isométries. La classification de ce type de groupes est maintenant établie : il y a exactement 7 symétries pour les frises et 17 groupes paveurs ! On sait aussi que les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone !

L'objet de cet atelier est de montrer, de façon très élémentaire, que pour un quadrilatère, la condition de régularité n'est pas exigée : tout quadrilatère convexe pave le plan de façon périodique i.e. il existe deux directions différentes du plan dans lesquelles le décor se répète de façon constante !

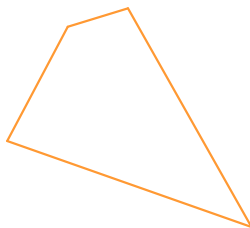
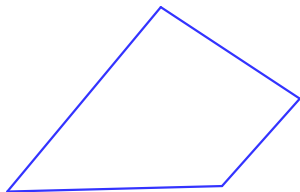
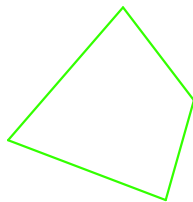
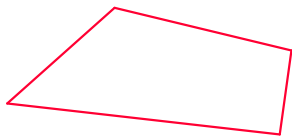
NOUS NOUS LIMITERONS AUX PAVAGES !

Les symétries d'un pavage sont des mouvements qui consistent à pousser, faire tourner, renverser, mais tout en préservant le décor. Elles se composent et donnent lieu à de nouvelles symétries ; on dira qu'elles forment un groupe d'isométries. La classification de ce type de groupes est maintenant établie : il y a exactement 7 symétries pour les frises et 17 groupes paveurs ! On sait aussi que les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone !

L'objet de cet atelier est de montrer, de façon très élémentaire, que pour un quadrilatère, la condition de régularité n'est pas exigée : tout quadrilatère convexe pave le plan de façon périodique i.e. il existe deux directions différentes du plan dans lesquelles le décor se répète de façon constante !

NOUS NOUS LIMITERONS AUX PAVAGES !

Question : *Un carreleur peut-il, par exemple, carreler le sol avec des carreaux tous "égaux" et ayant l'une des formes suivantes ?*



1. Le plan euclidien

On note \mathbb{E} le plan affine, c'est-à-dire un ensemble dont les éléments sont les **points** tel que par exemple le tableau noir sur lequel on écrit, un sol bien poli d'une grande salle, une table bien lisse... On s'y déplace dessus dans tous les sens, sans contrainte et sans limite !

À ce plan est associé un autre ensemble qu'on note $\vec{\mathbb{E}}$ et qu'on appelle *plan vectoriel*. Un élément de cet ensemble s'appelle *vecteur* et se note \vec{u} ; il est représenté par un couple de points (A, B) (A et B sont des éléments de \mathbb{E}). La “fonction” de \vec{u} est celle d'une force qui pousse les points de \mathbb{E} dans une direction, un sens et avec une certaine intensité. Ceci ne doit pas dépendre du point poussé ; le vecteur \vec{u} peut donc être représenté par tout autre couple de points (A', B') qui produit le même effet. Ce qui exige donc du quadrilatère $ABB'A'$ d'être un parallélogramme :

1. Le plan euclidien

On note \mathbb{E} le plan affine, c'est-à-dire un ensemble dont les éléments sont les **points** tel que par exemple le tableau noir sur lequel on écrit, un sol bien poli d'une grande salle, une table bien lisse... On s'y déplace dessus dans tous les sens, sans contrainte et sans limite !

À ce plan est associé un autre ensemble qu'on note $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ et qu'on appelle **plan vectoriel**. Un élément de cet ensemble s'appelle **vecteur** et se note \vec{u} ; il est représenté par un couple de points (A, B) (A et B sont des éléments de \mathbb{E}). La "fonction" de \vec{u} est celle d'une force qui pousse les points de \mathbb{E} dans une direction, un sens et avec une certaine intensité. Ceci ne doit pas dépendre du point poussé ; le vecteur \vec{u} peut donc être représenté par tout autre couple de points (A', B') qui produit le même effet. Ce qui exige donc du quadrilatère $ABB'A'$ d'être un parallélogramme :

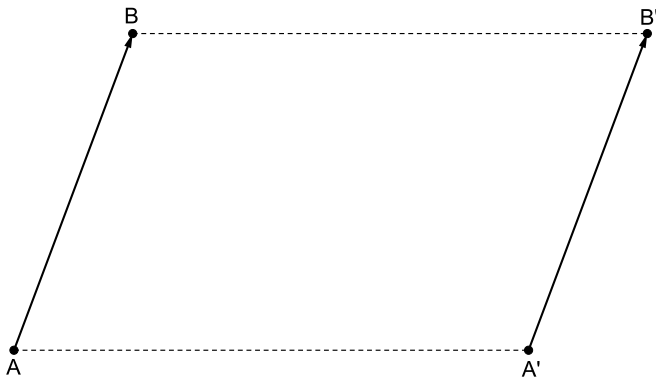


Fig. 1

Sur l'ensemble $\vec{\mathbb{E}}$ sont définies les notions de *somme* et de *multiplication* par un nombre réel : à deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} on associe $\vec{u} + \vec{v}$ et à tout vecteur \vec{u} et tout réel λ on associe $\lambda\vec{u}$. On ne donnera aucune définition formelle, on regarde simplement les dessins qui suivent :

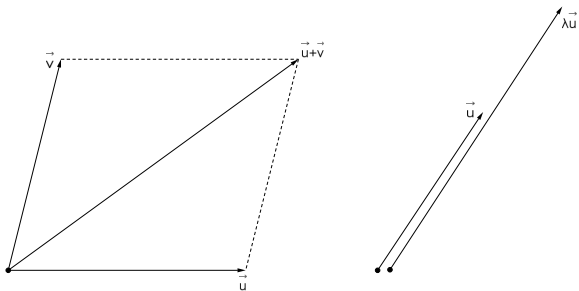


Fig. 2

Ces opérations vérifient un certain nombre de propriétés très importantes pour la commodité des manipulations, des calculs et tout le reste :

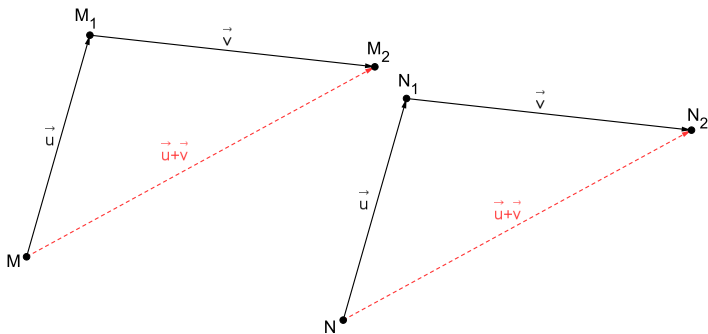
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (on commence comme on veut!);
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est neutre);
- tout \vec{u} admet un opposé noté $-\vec{u}$; il est tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (on pousse dans le sens inverse pour ramener le point à sa position initiale);
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (1 ne produit aucun effet);
- $\mu \cdot (\lambda \cdot \vec{u}) = (\mu\lambda) \cdot \vec{u}$;
- $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$ (la distributivité vectorielle);
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$ (la distributivité scalaire).

Comme on l'a dit, $\vec{\mathbb{E}}$ agit sur \mathbb{E} en poussant ses points ; en termes mathématiques, cela signifie qu'il existe une application

$T : (\vec{u}, M) \in \vec{\mathbb{E}} \times \mathbb{E} \mapsto M + \vec{u} \in \vec{\mathbb{E}}$ telle que :

- $M + \vec{0} = M$ pour tout $M \in \mathbb{E}$;
- $M + (\vec{u} + \vec{v}) = (M + \vec{u}) + \vec{v}$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathbb{E}}$ et tout $M \in \mathbb{E}$;
- $M + \vec{u} = M$ implique $\vec{u} = \vec{0}$ (action libre) ;
- pour tous M, N de \mathbb{E} il existe $\vec{u} \in \vec{\mathbb{E}}$ tel que $M + \vec{u} = N$ (action transitive).

On dira que T est une *action* de $\vec{\mathbb{E}}$ sur \mathbb{E} . (C'est celle qui définit la structure affine.)



Les vecteurs poussent les points !

Fig. 3

Sur \mathbb{E} , on suppose qu'on sait mesurer la *distance* entre deux points et l'*angle* entre deux vecteurs, deux droites ou deux demi-droites. Ceci se fait à l'aide d'un produit scalaire sur $\vec{\mathbb{E}}$ mais nous laisserons libre cours à notre intuition pour ne garder que les perceptions que nous en avons dans la vie réelle.

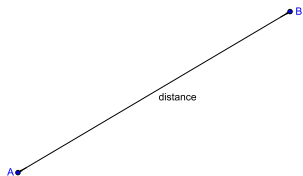


Fig. 4

On a aussi besoin de savoir dans quel sens on “bouge” dans cet espace euclidien, autrement dit, d’une notion d’*orientation*. Sur une droite on sait ce que c’est : il suffit de se fixer deux points A et B et dire que l’*orientation positive* est celle qui consiste d’aller de A vers B , l’autre sens (B vers A) est l’*orientation négative*.

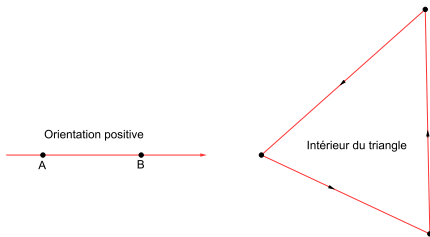


Fig. 6

On convient qu’*orienter positivement* le plan c’est se donner comme sens de parcours sur le triangle celui qui consiste à marcher dessus de telle sorte que l’intérieur soit à gauche.

2. Les mouvements euclidiens

Un *mouvement* du plan est une bijection f de \mathbb{E} sur lui-même qui doit avoir quelques propriétés en plus. D'abord :

- Envoyer trois points alignés A, B, C sur trois points alignés A', B', C' dans le même ordre ;
- le rapport dans lequel B divise de segment $[AC]$ doit être le même que celui dans lequel B' divise $[A'C']$.

On dira que l'application f est *affine*.

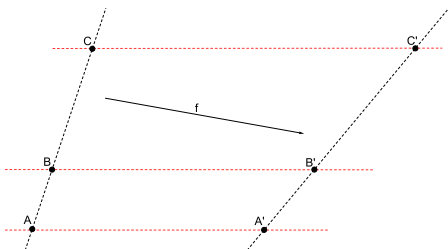


Fig. 7

On peut voir sur la figure qui suit comment une transformation de ce type agit sur une figure géométrique.

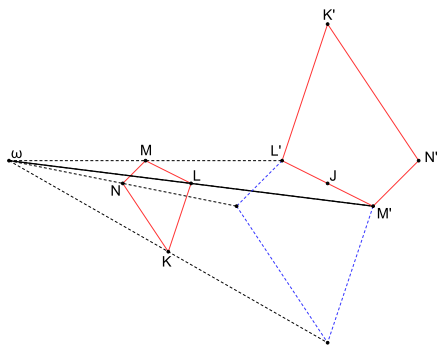


Fig. 8

Cette transformation est une *similitude*. Certes, elle préserve la forme mais pas la taille !

Celles qui gardent la forme et la taille sont appelées *isométries*. On demande que la distance entre deux points A et B soit la même qu'entre leurs transformés A' et B' . On peut lister toutes ces transformations.

TRANSLATION

Elle consiste à pousser les points par un vecteur \vec{u} . Elle est donc naturellement définie par ce vecteur. Elle conserve aussi l'orientation.

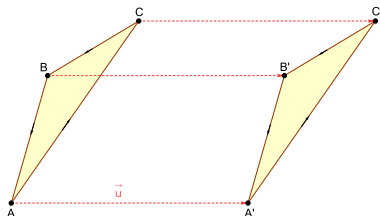
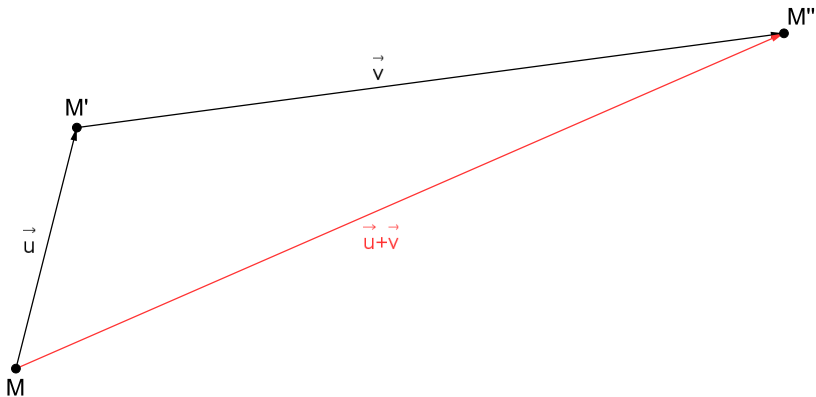


Fig. 9



Les translations se composent comme les vecteurs !
La translation de vecteur nul est l'identité !
Les translations forment un groupe commutatif.

Fig. 10

ROTATION

Elle consiste à faire tourner les points d'un angle appelé *angle de rotation* autour d'un point appelé *centre de rotation*.

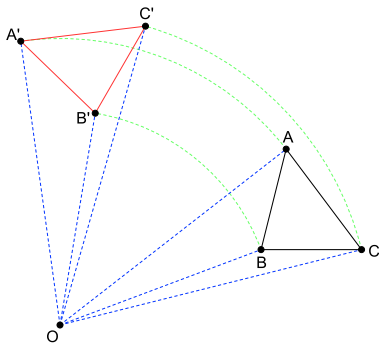


Fig. 11

Elle conserve les distances et l'orientation du plan.

La composée de deux rotations de même centre est une rotation ayant le même centre ; son angle est la somme des angles. Les rotations de même centre forment un *groupe commutatif*. Une translation peut s'interpréter comme une rotation ayant un centre rejeté à l'infini !

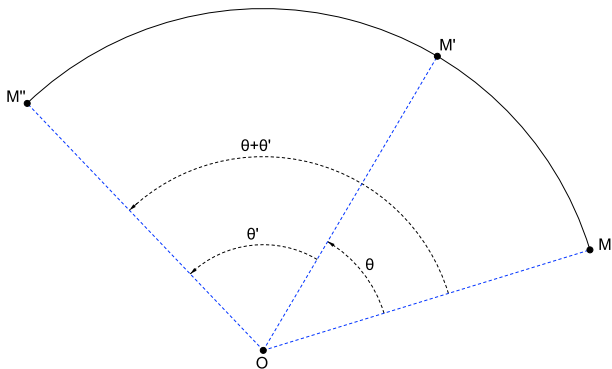


Fig. 12

RÉFLEXION

C'est regarder l'image d'un objet dans un miroir ! Elle est donc associée à une droite appelée *axe de réflexion* (ou *axe de symétrie*).

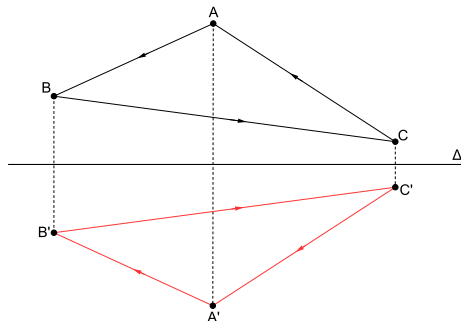


Fig. 13

Elle conserve les distances. Mais elle renverse l'orientation ; c'est un défaut mais aussi un avantage !

Les réflexions engendrent toutes les isométries du plan comme on peut le voir sur les dessins qui suivent.

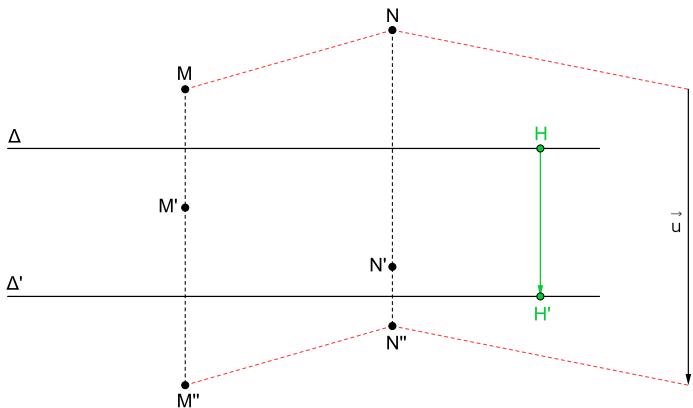


Fig. 14

Une translation est la composée de deux réflexions d'axes parallèles.

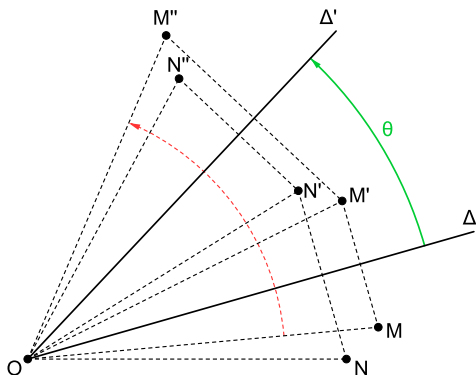


Fig. 15

Une rotation est la composée de deux réflexions d'axes concourant au centre de la rotation.

SYMÉTRIE GLISSÉE

Une *symétrie glissée* est le produit d'une translation $\tau = \tau_{\vec{u}}$ et d'une réflexion $s = s_{\Delta}$ d'axe Δ parallèle à \vec{u} . On compose dans n'importe quel ordre car, comme on le voit sur Fig. 16, on a toujours $s \circ \tau = \tau \circ s$.

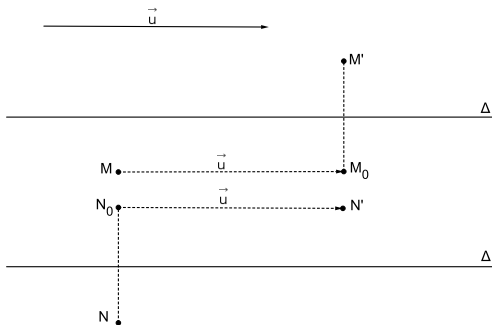
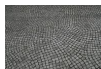


Fig. 16

3. Les pavages et leurs symétries

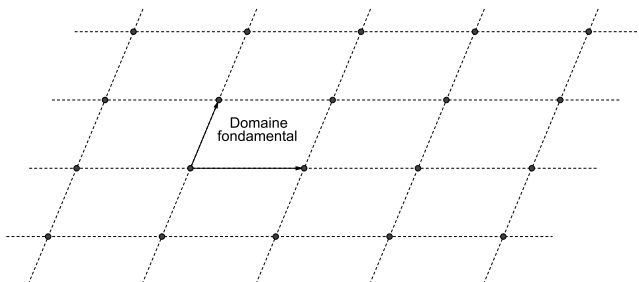
Un *pavage* est une partition du plan euclidien en polygones ne pouvant ni se chevaucher ni laisser de place vide. Une idée est donnée par les dessins qui suivent (c'est plus parlant).



Différents carrelages

Fig. 17

Un *automorphisme* d'un pavage est une isométrie du plan qui envoie un pavé sur un autre pavé. Ces automorphismes forment un groupe. Le pavage est dit *périodique* si ce groupe contient deux translations linéairement indépendantes. Les vecteurs \vec{a} et \vec{b} de plus petite "longueur" associés à de telles translations qui possèdent cette propriété engendrent un *réseau* dans le plan.



Un réseau dans le plan euclidien

Fig. 18

Les vecteurs \vec{a} et \vec{b} déterminent un parallélogramme appelé *domaine fondamental* du réseau.

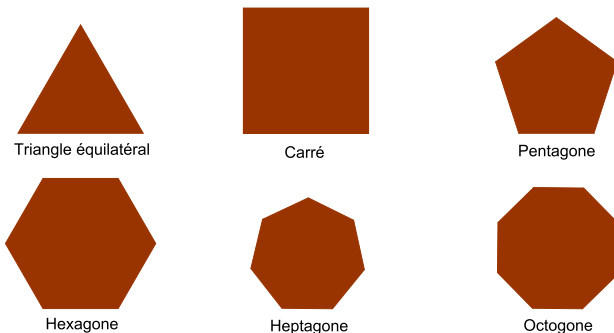


Fig. 19

Dans un pavage périodique le motif essentiel se trouve dans le domaine fondamental du réseau. Celui-ci peut aussi posséder une “certaine symétrie interne”. Le groupe des automorphismes du pavage sera donc une “extension” du réseau Γ et d’un groupe fini G . Ce dernier est constitué de réflexions ou de rotations ; son action sur Γ limitent le nombre des groupes paveurs !

PAVAGES RÉGULIERS

Quels sont les polygones réguliers qui pavent périodiquement ?



Polygones réguliers

Fig. 20

L'action du sous-groupe fini doit préserver le réseau Γ .

THÉORÈME DE LEONARDO

*Les sous-groupes finis d'isométries du plan sont de deux types :
le groupe diédral D_n et le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

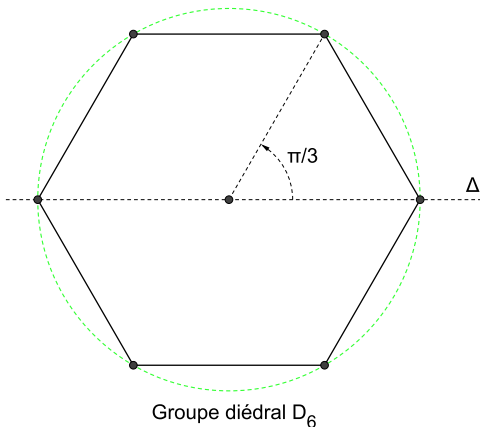


Fig. 21

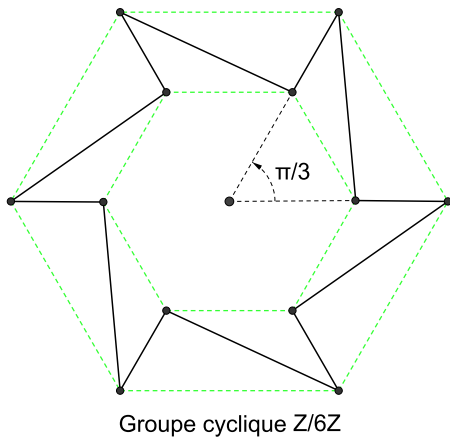


Fig. 22

Démonstration. Il s'agit évidemment de Léonard de Vinci ! Il a été le premier à avoir remarqué les symétries possibles d'un bâtiment central et comment y attacher des chapelles et des niches sans détruire les symétries du noyau. C'est la raison pour laquelle ce théorème lui revient.

i) G ne contient ni translation ni symétrie glissée (la composée d'une translation et d'une réflexion d'axe parallèle au vecteur de translation) ; ces éléments sont d'ordre infini. Et si G en contenait, cela contredirait le fait qu'il est fini.

Démonstration. Il s'agit évidemment de Léonard de Vinci ! Il a été le premier à avoir remarqué les symétries possibles d'un bâtiment central et comment y attacher des chapelles et des niches sans détruire les symétries du noyau. C'est la raison pour laquelle ce théorème lui revient.

i) G ne contient ni translation ni symétrie glissée (la composée d'une translation et d'une réflexion d'axe parallèle au vecteur de translation) ; ces éléments sont d'ordre infini. Et si G en contenait, cela contredirait le fait qu'il est fini.

ii) On suppose que G préserve l'orientation. Il ne contient donc que des rotations. Si deux rotations ρ_1 et ρ_2 avaient des centres différents, le commutateur $\rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1$ serait une translation non triviale, ce qui n'est pas possible, donc tous les éléments de G sont des rotations de même centre et par suite G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ici p est l'ordre de G).

iii) Supposons que G contient au moins une réflexion. Les éléments qui préserve l'orientation forment un sous-groupe H non trivial isomorphe à C_n d'après ce qui précède. C'est le noyau du morphisme signature $\varepsilon : G \longrightarrow \{1, -1\}$ qui est non trivial et donc surjectif; il est donc d'indice 2 dans G et par suite normal; G s'identifie à un produit semi-direct $H \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est isomorphe au groupe diédral D_n .

ii) On suppose que G préserve l'orientation. Il ne contient donc que des rotations. Si deux rotations ρ_1 et ρ_2 avaient des centres différents, le commutateur $\rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1$ serait une translation non triviale, ce qui n'est pas possible, donc tous les éléments de G sont des rotations de même centre et par suite G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ici p est l'ordre de G).

iii) Supposons que G contient au moins une réflexion. Les éléments qui préserve l'orientation forment un sous-groupe H non trivial isomorphe à C_n d'après ce qui précède. C'est le noyau du morphisme signature $\varepsilon : G \longrightarrow \{1, -1\}$ qui est non trivial et donc surjectif; il est donc d'indice 2 dans G et par suite normal; G s'identifie à un produit semi-direct $H \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est isomorphe au groupe diédral D_n .

THÉORÈME

L'ordre d'une rotation dans le groupe G est 2, 3, 4 ou 6.

Démonstration. Le groupe fini G (qui ne contient que des rotations) agit en préservant le réseau Γ . Soit ρ son générateur. Soit \vec{a} un élément de Γ ayant la plus petite longueur.

1 - Supposons que l'ordre n de G est strictement supérieur à 6. Dans ce cas l'angle de rotation de ρ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Posons $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$; alors le vecteur $\vec{a}_1 - \vec{a}$ appartient à Γ et a une longueur strictement inférieure à celle de \vec{a} (cf. Fig. 23); ce qui contredit le choix de celui-ci.

2 - Supposons maintenant $n = 5$. Dans ce cas l'angle de rotation de ρ est $\frac{2\pi}{5}$. Posons $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$ et $\vec{a}_2 = \rho(\vec{a}_1)$. Alors le vecteur $\vec{a}_2 + \vec{a}$ appartient à Γ et a une longueur strictement inférieure à celle de \vec{a} (cf. Fig. 24); ce qui contredit encore une fois le choix de \vec{a} .

THÉORÈME

L'ordre d'une rotation dans le groupe G est 2, 3, 4 ou 6.

Démonstration. Le groupe fini G (qui ne contient que des rotations) agit en préservant le réseau Γ . Soit ρ son générateur. Soit \vec{a} un élément de Γ ayant la plus petite longueur.

1 - Supposons que l'ordre n de G est strictement supérieur à 6. Dans ce cas l'angle de rotation de ρ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Posons $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$; alors le vecteur $\vec{a}_1 - \vec{a}$ appartient à Γ et a une longueur strictement inférieure à celle de \vec{a} (cf. Fig. 23); ce qui contredit le choix de celui-ci.

2 - Supposons maintenant $n = 5$. Dans ce cas l'angle de rotation de ρ est $\frac{2\pi}{5}$. Posons $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$ et $\vec{a}_2 = \rho(\vec{a}_1)$. Alors le vecteur $\vec{a}_2 + \vec{a}$ appartient à Γ et a une longueur strictement inférieure à celle de \vec{a} (cf. Fig. 24); ce qui contredit encore une fois le choix de \vec{a} .

THÉORÈME

L'ordre d'une rotation dans le groupe G est 2, 3, 4 ou 6.

Démonstration. Le groupe fini G (qui ne contient que des rotations) agit en préservant le réseau Γ . Soit ρ son générateur. Soit \vec{a} un élément de Γ ayant la plus petite longueur.

1 - Supposons que l'ordre n de G est strictement supérieur à 6. Dans ce cas l'angle de rotation de ρ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Posons $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$; alors le vecteur $\vec{a}_1 - \vec{a}$ appartient à Γ et a une longueur strictement inférieure à celle de \vec{a} (cf. Fig. 23); ce qui contredit le choix de celui-ci.

2 - Supposons maintenant $n = 5$. Dans ce cas l'angle de rotation de ρ est $\frac{2\pi}{5}$. Posons $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$ et $\vec{a}_2 = \rho(\vec{a}_1)$. Alors le vecteur $\vec{a}_2 + \vec{a}$ appartient à Γ et a une longueur strictement inférieure à celle de \vec{a} (cf. Fig. 24); ce qui contredit encore une fois le choix de \vec{a} .

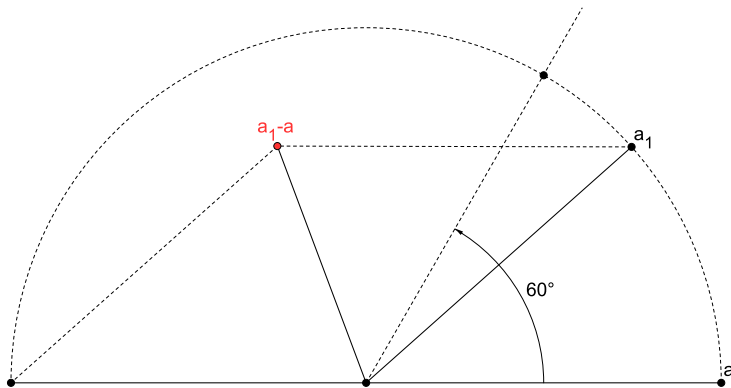


Fig. 23

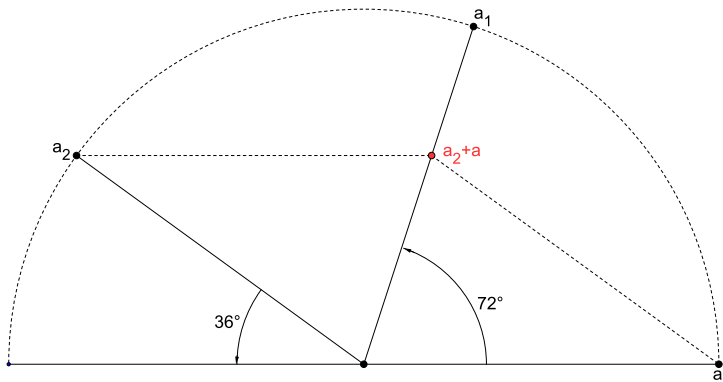


Fig. 24

POLYGONES RÉGULIERS PAVEURS

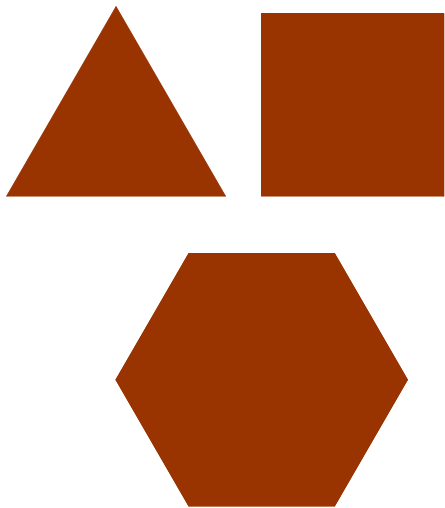


Fig. 25

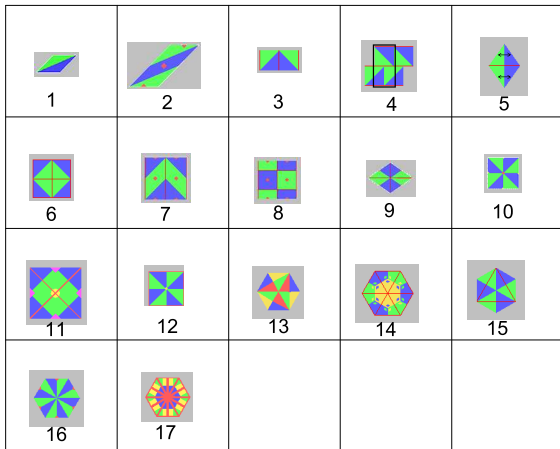


Fig. 26

Les 17 groupes paveurs !

<http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/wallpaper.html>

Mais “qu’est-ce qu’un **groupe paveur**?”

On rappelle qu’un groupe d’isométries du plan est exactement un ensemble de mouvements (y compris celui qui est sans effet) stable par compositions successives et par passage à leurs inverses :

- Les translations poussent,
- les rotations font tourner,
- les réflexions symétrisent par rapport à des axes.

Quand on prend une “brique” avec un motif dedans, qu’on lui applique de toutes les manières possibles les mouvements du groupe et qu’on arrive à paver le plan de façon périodique, on dit alors que le groupe en question est **paveur**. Regardons en détail l’exemple du numéro 7.

Mais “qu’est-ce qu’un **groupe paveur**?”

On rappelle qu’un groupe d’isométries du plan est exactement un ensemble de mouvements (y compris celui qui est sans effet) stable par compositions successives et par passage à leurs inverses :

- Les translations poussent,
- les rotations font tourner,
- les réflexions symétrisent par rapport à des axes.

Quand on prend une “brique” avec un motif dedans, qu’on lui applique de toutes les manières possibles les mouvements du groupe et qu’on arrive à paver le plan de façon périodique, on dit alors que le groupe en question est **paveur**. Regardons en détail l’exemple du numéro 7.

Mais “qu’est-ce qu’un **groupe paveur**?”

On rappelle qu’un groupe d’isométries du plan est exactement un ensemble de mouvements (y compris celui qui est sans effet) stable par compositions successives et par passage à leurs inverses :

- Les translations poussent,
- les rotations font tourner,
- les réflexions symétrisent par rapport à des axes.

Quand on prend une “brique” avec un motif dedans, qu’on lui applique de toutes les manières possibles les mouvements du groupe et qu’on arrive à paver le plan de façon périodique, on dit alors que le groupe en question est **paveur**. Regardons en détail l’exemple du numéro 7.

Mais “qu’est-ce qu’un **groupe paveur**?”

On rappelle qu’un groupe d’isométries du plan est exactement un ensemble de mouvements (y compris celui qui est sans effet) stable par compositions successives et par passage à leurs inverses :

- Les translations poussent,
- les rotations font tourner,
- les réflexions symétrisent par rapport à des axes.

Quand on prend une “brique” avec un motif dedans, qu’on lui applique de toutes les manières possibles les mouvements du groupe et qu’on arrive à paver le plan de façon périodique, on dit alors que le groupe en question est **paveur**. Regardons en détail l’exemple du numéro 7.

Mais “qu’est-ce qu’un **groupe paveur**?”

On rappelle qu’un groupe d’isométries du plan est exactement un ensemble de mouvements (y compris celui qui est sans effet) stable par compositions successives et par passage à leurs inverses :

- Les translations poussent,
- les rotations font tourner,
- les réflexions symétrisent par rapport à des axes.

Quand on prend une “brique” avec un motif dedans, qu’on lui applique de toutes les manières possibles les mouvements du groupe et qu’on arrive à paver le plan de façon périodique, on dit alors que le groupe en question est **paveur**. Regardons en détail l’exemple du numéro 7.

Mais “qu’est-ce qu’un **groupe paveur**?”

On rappelle qu’un groupe d’isométries du plan est exactement un ensemble de mouvements (y compris celui qui est sans effet) stable par compositions successives et par passage à leurs inverses :

- Les translations poussent,
- les rotations font tourner,
- les réflexions symétrisent par rapport à des axes.

Quand on prend une “brique” avec un motif dedans, qu’on lui applique de toutes les manières possibles les mouvements du groupe et qu’on arrive à paver le plan de façon périodique, on dit alors que le groupe en question est **paveur**. Regardons en détail l’exemple du numéro 7.

La brique de départ est celle de la figure 26 sur laquelle on opère les mouvements qui suivent :

- on symétrise par rapport au point Ω et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau,
- on symétrise par rapport à l'axe vertical tracé en vert et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau.

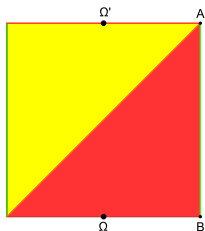


Fig. 26

La brique de départ est celle de la figure 26 sur laquelle on opère les mouvements qui suivent :

- on symétrise par rapport au point Ω et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau,
- on symétrise par rapport à l'axe vertical tracé en vert et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau.

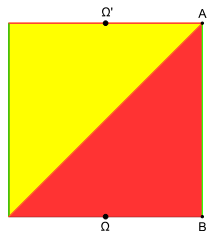


Fig. 26

La brique de départ est celle de la figure 26 sur laquelle on opère les mouvements qui suivent :

- on symétrise par rapport au point Ω et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau,
- on symétrise par rapport à l'axe vertical tracé en vert et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau.

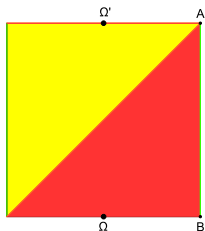


Fig. 26

On obtient alors le pavage qui suit. Le groupe paveur est engendré par le réseau Γ dont les translations sont données par un vecteur horizontal et un vecteur vertical de deux carreaux (deux briques) chacun, de la symétrie centrée en Ω et la réflexion d'axe la droite (AB) .

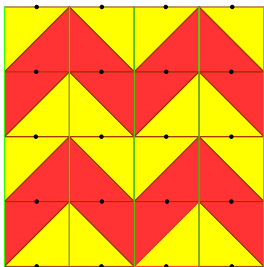


Fig. 27

UN QUADRILATÈRE CONVEXE QUELCONQUE PEUT-IL PAVER ?

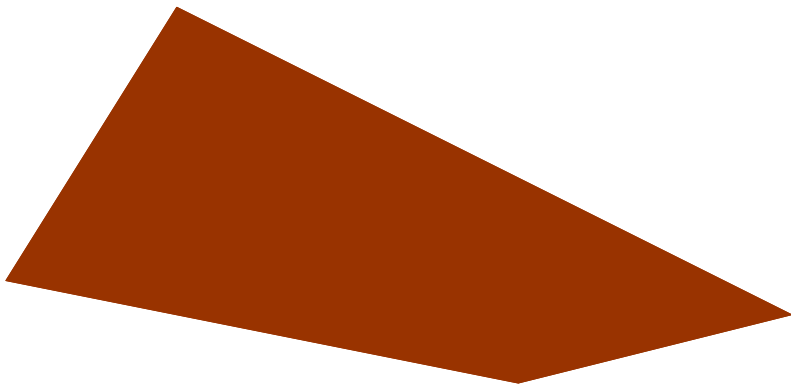


Fig. 28

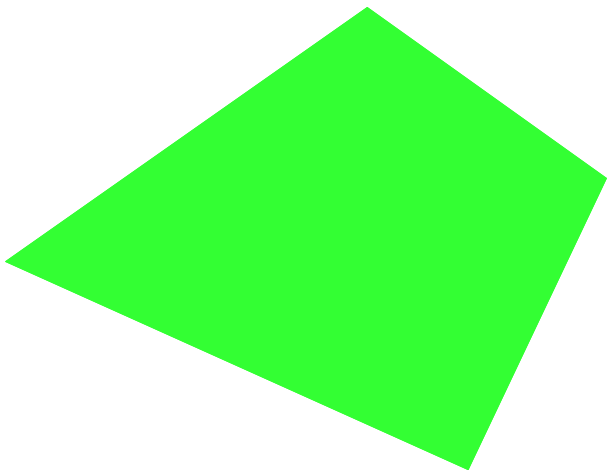


Fig. 29

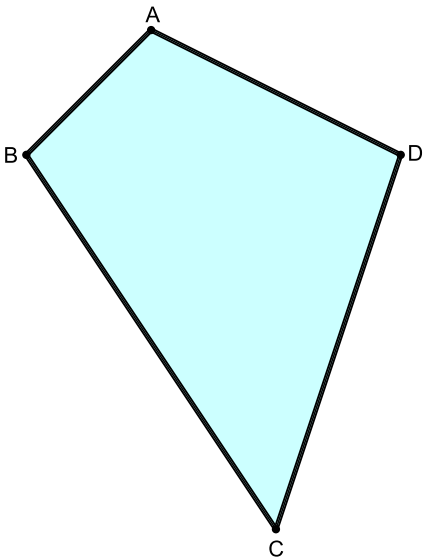


Fig. 30

4. Travail effectif

Il se fera sous forme d'exercice !

Question 1. Soit ABC un triangle quelconque. On note α , β et γ les mesures respectives des angles (en degrés par exemple) \widehat{BAC} , \widehat{CBA} et \widehat{ACB} . Montrer que : $\alpha + \beta + \gamma = 180$ degrés.

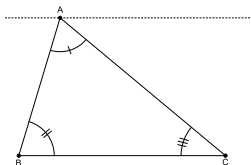


Fig. 31

Il est possible qu'a priori on ne sache pas comment aborder la question. Mais la figure peut aider à démarrer : il faut la regarder, y ajouter éventuellement d'autres éléments.

On rappelle qu'un *polygone* Δ_n à n ($n \geq 3$) côtés est la donnée de n points (distincts bien sûr) A_1, \dots, A_n dans le plan. Nous supposons toujours que trois points quelconques parmi les n ne sont pas alignés pour avoir un vrai n -gone (comme on dit). On dira que Δ_n est *convexe* si, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la droite $(A_i A_j)$ partage le plan de telle sorte que les points qui restent soient tous dans le même demi-plan (cf. Fig. 32).

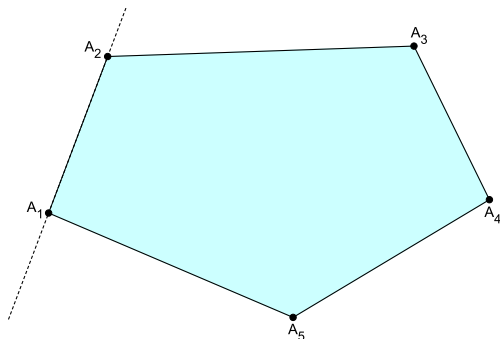


Fig. 32

Question 2. *Calculer la somme des mesures d'un polygone convexe à n côtés. Quelle est en particulier celle d'un quadrilatère convexe ?*

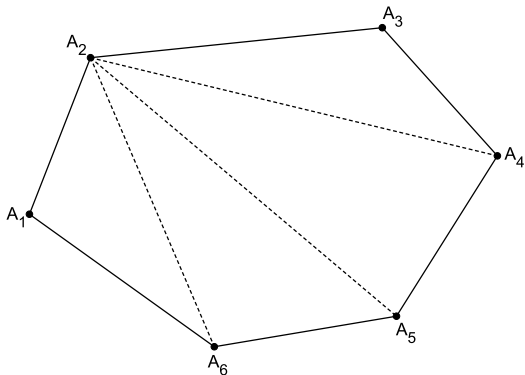


Fig. 33

Question 3. *Pour chacun des pavages périodiques qui suivent déterminer de façon précise le réseau Γ , les translations qui le définissent et un domaine fondamental !*

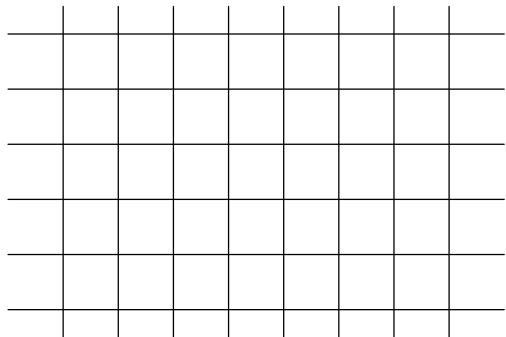


Fig. 34

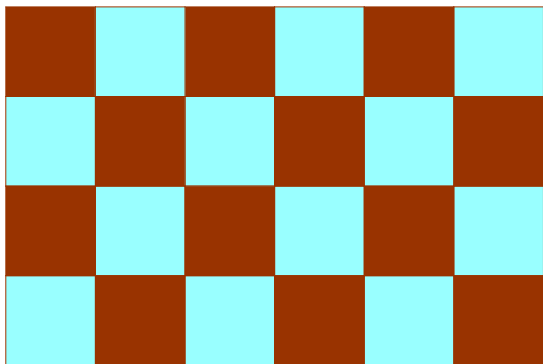
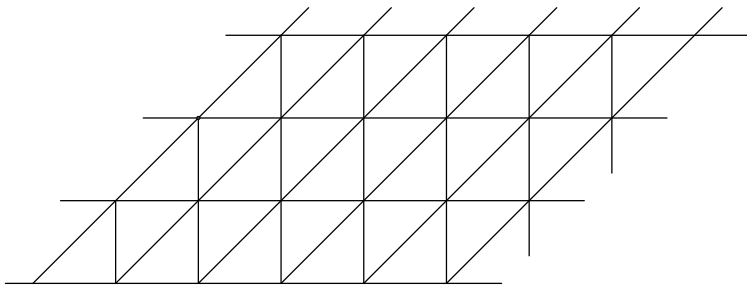
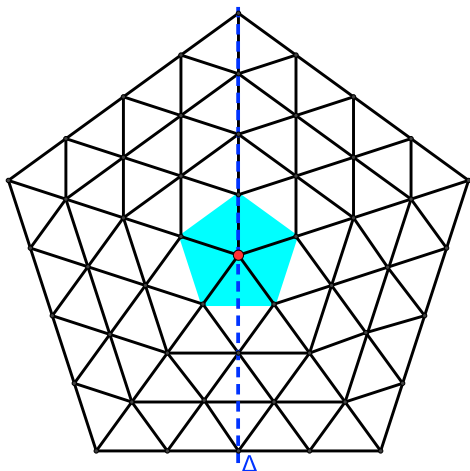


Fig. 35

**Fig. 36**



Pavage non périodique mais ayant un groupe de symétrie isomorphe au groupe diédral D_5 engendré par la rotation d'angle 72° et la réflexion d'axe Δ

Fig. 37 bis

L'opération carrelage

- 1 - Prendre une vingtaine de quadrilatères convexes isométriques. Commencer à les placer côte à côte pour couvrir une portion du plan.*
- 2 - Constaté qu'il n'y a aucune obstruction au niveau des angles à chacun des sommets et que l'opération est toujours possible.*
- 3 - Donner les vecteurs des deux translations qui déterminent le réseau du pavage périodique. Voir s'il y a éventuellement d'autres symétries (c'est-à-dire des symétries centrales, des rotations ou autres...)*

L'opération carrelage

- 1 - Prendre une vingtaine de quadrilatères convexes isométriques. Commencer à les placer côte à côte pour couvrir une portion du plan.*
- 2 - Constater qu'il n'y a aucune obstruction au niveau des angles à chacun des sommets et que l'opération est toujours possible.*
- 3 - Donner les vecteurs des deux translations qui déterminent le réseau du pavage périodique. Voir s'il y a éventuellement d'autres symétries (c'est-à-dire des symétries centrales, des rotations ou autres...)*

L'opération carrelage

- 1 - Prendre une vingtaine de quadrilatères convexes isométriques. Commencer à les placer côte à côte pour couvrir une portion du plan.*
- 2 - Constater qu'il n'y a aucune obstruction au niveau des angles à chacun des sommets et que l'opération est toujours possible.*
- 3 - Donner les vecteurs des deux translations qui déterminent le réseau du pavage périodique. Voir s'il y a éventuellement d'autres symétries (c'est-à-dire des symétries centrales, des rotations ou autres...)*

THÉORÈME

Tout quadrilatère convexe pave périodiquement le plan euclidien.

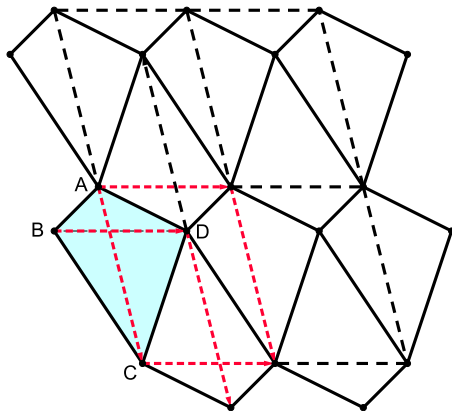


Fig. 38

5. Pavages hexagonaux

Nous avons déjà vu qu'un hexagone régulier pave toujours et de façon périodique ! La question qui suit est alors naturelle.

5.1. Question. *Existe-t-il des hexagones non réguliers qui pavent ? Si oui, donnent-ils des pavages périodiques comme dans le cas régulier ?*

Évidemment, un hexagone quelconque ne pave pas : on peut facilement construire des exemples à cet effet. Mais il en existe qui pavent même périodiquement. Ceux-là ont bien entendu une certaine particularité. Nous allons en voir un exemple.

5.2. Théorème

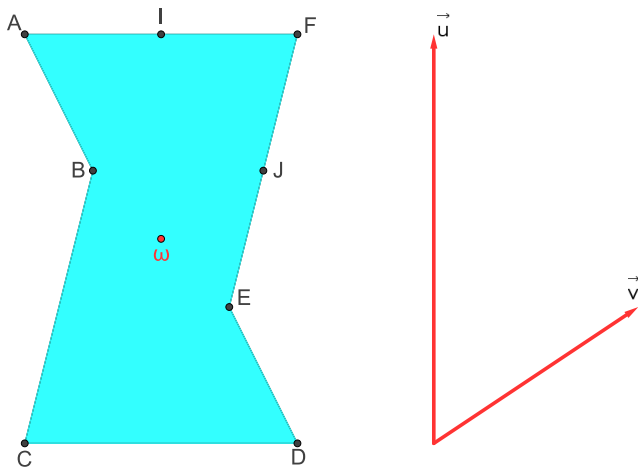
Soit $\Delta = ABCDEF$ un hexagone ayant un centre de symétrie ω .
Alors Δ pave périodiquement le plan.

Démonstration. Elle est presque immédiate. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AF]$ et $[FE]$, posons :

$$\vec{u} = 2\omega I \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\omega J$$

et notons τ_1 et τ_2 les translations associées respectivement à \vec{u} et \vec{v} . Si σ_ω , σ_I et σ_J sont les symétries de centres respectifs ω , I et J alors :

$$\tau_1 = \sigma_I \circ \sigma_\omega \quad \text{et} \quad \tau_2 = \sigma_J \circ \sigma_\omega.$$



Hexagone avec un centre de symétrie ω

Fig. 39

Les translatsés de Δ par le groupe Γ engendré par τ_1 et τ_2 forment un pavage \mathcal{T} du plan dont le groupe des automorphismes $\text{Aut}(\mathcal{T})$ contient (par construction même) le réseau Γ , donc \mathcal{T} est périodique (cf. dessin qui suit).

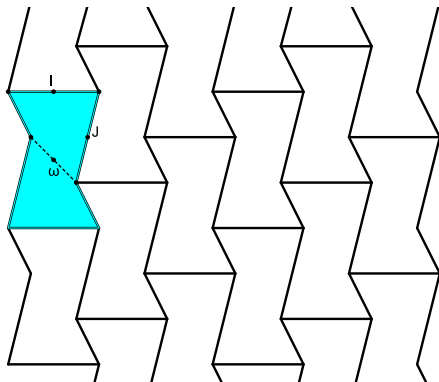
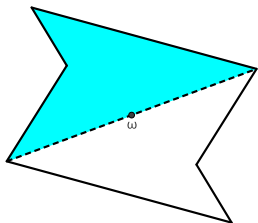


Fig. 40

5.3. Première application : *tout quadrilatère convexe ou non pave périodiquement.*

On symétrise ce quadrilatère par rapport au milieu ω d'un côté dont la droite qui le contient détermine un demi-plan ouvert ne le contenant pas. La réunion des deux quadrilatères (l'initial et son symétrisé) donne un hexagone ayant ω comme centre de symétrie. On applique alors ce qui précède.

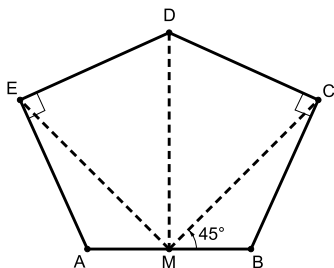


La réunion du quadrilatère et de son symétrisé par rapport à ω donne un hexagone ayant ω comme centre de symétrie

Fig. 41

5.4. Deuxième application : *Le pavage du Caire*

Il s'agit d'un pavage par un pentagone équilatéral (les 5 côtés sont égaux). Il a été découvert par Marjorie Rice en 1975. On le trouve assez fréquemment dans les rues du Caire, d'où son appellation.



Pavé du Caire

Les angles de sommets C et E sont droits
 La somme des angles de sommets A, B et D
 est donc égale à 360°

Fig. 42

Nous allons commencer par construire ce pentagone, ensuite nous montrerons comment on peut l'utiliser pour paver le plan.

- On part d'un segment $[AB]$. De son milieu M on trace deux segments $[MC]$ et $[ME]$ tels que :

$$MC = ME = AB$$

et les mesures des angles \widehat{BMC} et \widehat{EMA} soient égales à $\frac{\pi}{4}$ (ou 45) ; l'angle \widehat{EMC} est donc droit. Les perpendiculaires menées par C et E respectivement à (BC) et (AE) se coupent en un point D .

- Le pentagone convexe $ABCDE$ est équilatéral. On sait que $MC = ME = AB$; reste juste à montrer que :

$$ED = CD = BC.$$

Par symétrie par rapport à l'axe (MD) on a $ED = CD$; il suffit donc d'établir l'égalité $BC = CD$. Comme les angles \widehat{BMD} et \widehat{BCD} sont droits le quadrilatère $MBCD$ est inscrit dans un cercle \mathcal{C} ; donc les angles \widehat{DBC} et \widehat{CMD} (qui interceptent le même arc dans le cercle \mathcal{C}) sont égaux.

Par suite l'angle \widehat{DBC} vaut $\frac{\pi}{4}$; comme le triangle DBC est rectangle en C (par construction), l'angle \widehat{BDC} vaut aussi $\frac{\pi}{4}$, ce qui montre que le triangle BCD est isocèle de base le segment $[BD]$ et donc $BC = CD$.

- On prend quatre exemplaires isométriques d'un tel pentagone. On les dispose comme dans le dessin qui suit. Le lecteur peut alors facilement vérifier que l'on obtient un hexagone ayant le point ω (milieu du segment AB) comme centre de symétrie.
- Pour obtenir le pavage du Caire il suffit alors de paver à l'aide de l'hexagone qu'on vient d'obtenir. C'est un pavage périodique comme on peut le constater de façon immédiate.

6. En guise de conclusion

Le thème des *pavages* a beaucoup intéressé les géomètres, les artistes, les artisans... à travers la symétrie et la beauté des objets dont il fait usage. Il a aussi de nombreuses applications hormis son utilisation pour décorer les sols, les murs et pas mal d'autres surfaces. Il est très ancien, de caractère universel et a tenu une place centrale dans le développement de beaucoup de civilisations : les décors somptueux qu'on peut admirer par exemple au **Palais de l'Alhambra** à Grenade (Espagne) montrent à quel point l'art islamique a été à la fois précurseur, bâtisseur et porteur d'excellence dans ce domaine.

L'étude des pavages est aussi centrale en cristallographie. Depuis quelques années elle a constitué presque une branche propre des mathématiques combinant géométrie et théorie des groupes. (Le lecteur qui aimerait plonger plus profondément dans le sujet pourrait consulter le beau livre de B. Grünbaum et G. Shephard (cf. références).) Une question principale reste toujours la suivante :

Quels sont les polygones qui donnent des pavages monoïédraux ?

Précédemment nous avons plus ou moins indiqué quelques éléments de réponse ; nous allons les résumer ci-après.

6.1. Il a été démontré par I. Niven en 1978 qu'un polygone ayant un nombre de côtés supérieur ou égal à 7 ne pave jamais. Il faut donc se limiter au triangle, au quadrilatère, au pentagone et à l'hexagone.

6.2. Un parallélogramme pave toujours le plan comme on peut le voir sur l'un des dessins de la section 1 de ce chapitre. Donc tout triangle pave : il suffit de prendre deux exemplaires, de les coller de façon à obtenir un parallélogramme et paver ensuite.

6.3. Tout quadrilatère pave : c'était l'objet de notre atelier et on l'a même fait de façon périodique (pour le cas convexe et le cas non convexe).

6.4. Un hexagone $\Delta = ABCDEF$ pave si, et seulement si, il fait partie de l'une des classes qui suivent :

- 1) $\widehat{FAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 2\pi$ et $CD = FA$.
- 2) $\widehat{FAB} + \widehat{ABC} + \widehat{CDE} = 2\pi$ et $BC = DE$ et $CD = FA$.
- 3) $\widehat{FAB} + \widehat{BCD} + \widehat{DEF} = \frac{2\pi}{3}$ et $AB = BC$, $CD = DE$ et $EF = FA$.

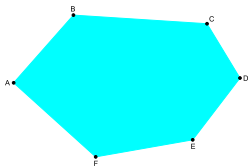
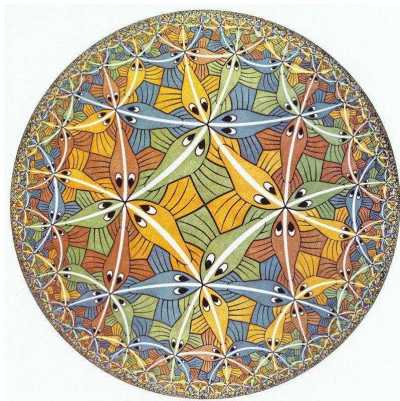


Fig. 44

La classe 1) englobe le cas de l'hexagone ayant un centre de symétrie que nous avons traité dans la section 5.

6.5. On sait qu'il y a des hexagones qui pavent comme celui qui donne le pavage du Caire que nous avons vu. Mais tous ne sont pas connus à l'heure actuelle même ceux qui sont équilatéraux.

CADEAU!



PAVAGE HYPERBOLIQUE

M.C. ESCHER

Une digression pour finir :

Les mouvements euclidiens de l'espace

On se place dans l'espace vectoriel euclidien \mathcal{E} de dimension 3. L'origine (vecteur nul) sera notée O et on se donnera une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Quand on parlera de coordonnées (x, y, z) d'un point de \mathcal{E} ce sera toujours par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On notera $\text{Isom}(\mathcal{E})$ le groupe des isométries de \mathcal{E} .

1 - On montre alors facilement que, si $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$, O' l'image de O par f et τ la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ alors f s'écrit $f = \tau \circ u$ avec $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ fixant O donc linéaire.

On peut donc se limiter à étudier les isométries linéaires dans un premier temps. En fait, le groupe $\text{Isom}(\mathcal{E})$ est le produit semi-direct $\mathcal{E} \rtimes \text{O}(\mathcal{E})$ où $\text{O}(\mathcal{E})$ est le groupe des isométries linéaires de \mathcal{E} .

2 - Il existe toujours un nombre réel θ et une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par rapport à laquelle la matrice de u a l'une des formes suivantes :

– si u préserve l'orientation alors la matrice A est de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

– si u ne préserve pas l'orientation, A est de la forme :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La matrice A_1 correspond au cas où u est une *rotation* (de l'espace) d'angle θ et d'axe la droite engendrée par le vecteur \vec{e}_1 .

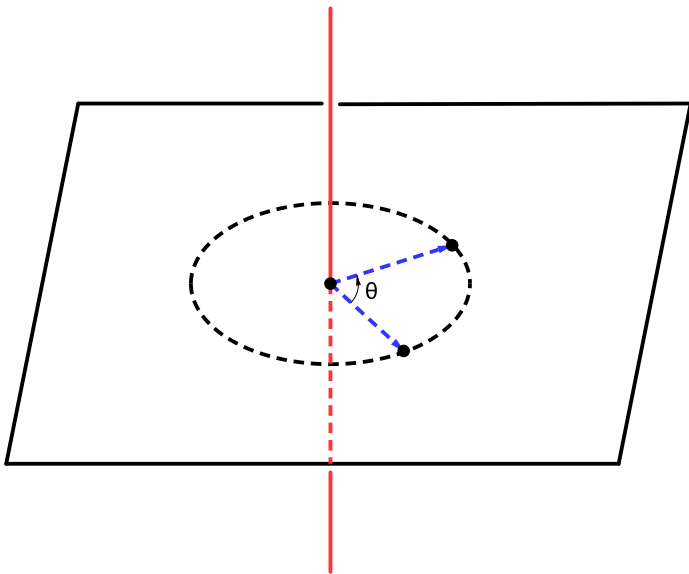


Fig. 45

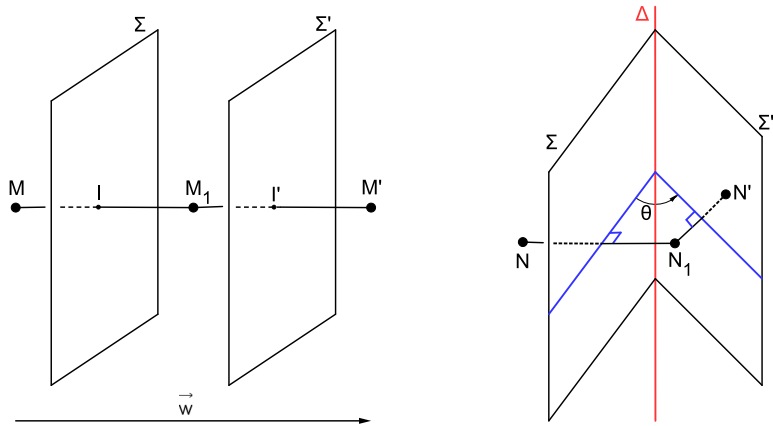


Fig. 46

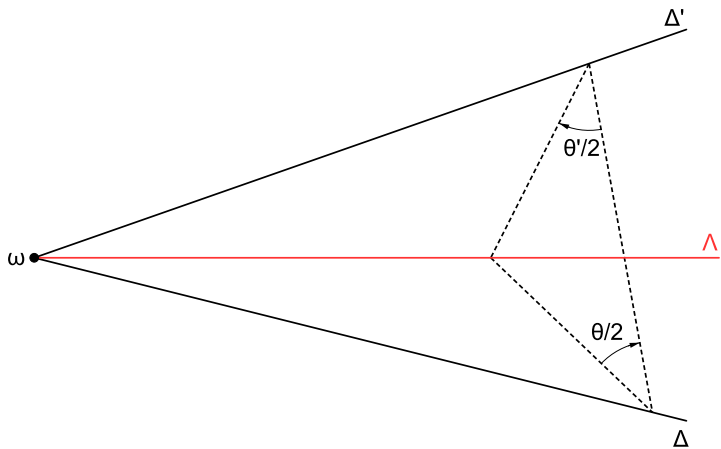


Fig. 48

On peut lister toutes les isométries affines de l'espace euclidien \mathcal{E} de dimension 3. Celles qui fixent l'origine sont évidemment linéaires et sont :

- les réflexions (par rapport à un plan vectoriel) ou
- les rotations (par rapport à une droite vectorielle).

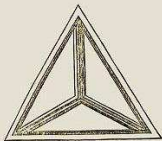
Celles qui ne sont pas linéaires sont composées d'une isométrie linéaire et d'une translation non triviale. Plus précisément, soit f une de ces isométries. Alors :

- f est une translation ou
- f est une rotation d'axe une droite affine ne passant pas par l'origine ou
- f est une réflexion par rapport à un plan affine ou
- f est la composée d'une rotation et d'une translation de vecteur orthogonal à l'axe de cette rotation. Une telle transformation est appelée *vissage* (c'est le mouvement d'un tournevis ou d'un tire-bouchon).

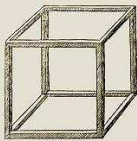
*Les nombres mesurent la taille,
les groupes mesurent la symétrie !*

Belle maxime tirée de la préface du livre
Groups and Symmetry
de M.A. Armstrong

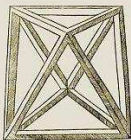
Les polyèdres réguliers de l'espace



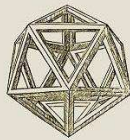
Le tétraèdre



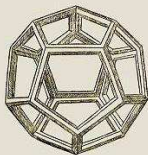
Le cube



L'octaèdre



L'icosaèdre



Le dodécaèdre

LES CINQ CORPS PLATONIENS (POLYÈDRES RÉGULIERS)

Dessins de Léonard de Vinci pour *La Divine proportion* de Luca Pacioli

Les sous-groupes finis

Les sous-groupes finis du groupe des isométries de l'espace sont tous connus de façon explicite :

– Le groupe cyclique d'ordre n : $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui correspond au groupe de symétrie d'une scie à dents circulaire (Fig. 22).

– Le groupe diédral $D_n = C_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui correspond au groupe de symétrie d'un polygone régulier plan à n côtés (Fig. 21).

Pour les autres, on se contente de donner ceux dont les éléments préservent l'orientation :

– Le groupe du tétraèdre régulier isomorphe à A_4 .

– Le groupe du cube isomorphe à \mathfrak{S}_4 .

– Le groupe de l'octaèdre régulier isomorphe à \mathfrak{S}_4 .

– Le groupe du dodécaèdre régulier isomorphe à A_5 .

– Le groupe de l'icosaèdre régulier isomorphe à A_5 .

DE LA BONNE LECTURE

- **Armstrong, M.A.** *Groups and Symmetry*. Collection Undergraduate Texts in Math., Springer Verlag (1988).
- **Ernst, B.** *Le miroir magique de M.C. Escher*. Taschen Éditeur.
- **Deledicq, A. & Raba, R.** *Le monde des pavages*. ACL Les Éditions du Kangourou (2002).
- **Grünbaum, B., and Shephard, G.** *Tilings and Patterns*. Freeman, New York (1987)
- **Martin, G.E.** *Transformation Geometry. Introduction to Symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag (1982).
- **Nicolas, A.** *Parcelles d'infini. Promenade au jardin d'Escher*. Bibliothèque scientifique Champs, Belin (2006).
- **Weyl, H.** *Symétrie et mathématique moderne*. Collection Champs, Flammarion (1996).