UNIVERSITÉS DE LILLE I ET VALENCIENNES

MASTER 2 DE MATHÉMATIQUES PURES
Cours fondamental

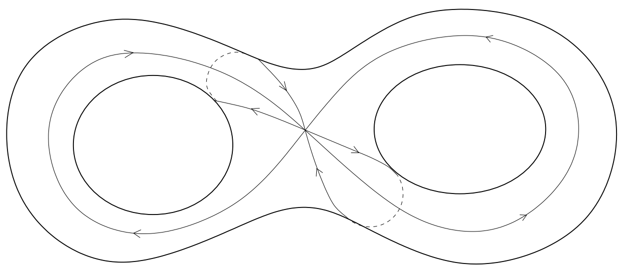
par

Aziz El Kacimi

(Université de Valenciennes)

Ce texte est extrait du cours de DEA ***Introduction aux formes automophes*** que Rajagopalan Parthasarathy et moi-ême avions dispensé et rédigé en 1996-1997

Éléments de topologie algébrique et différentielle



Surface compacte orientable de genre 2

Année universitaire 2009-2010

.

CHAPITRE I

Variétés réelles et complexes

L'existence de coordonnées globale dans les espaces numériques $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ les met au premier plan des objets de l'Analyse et de la Géométrie. Bien que cette propriété soit spécifique à ces espaces topologiques beaucoup d'autres se comportent localement comme $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$; on les appelle *variétés*. L'objet de ce chapitre est d'en donner la définition, de décrire certaines de leurs propriétés et les divers objets qui leur sont rattachés.

1. Variétés différentiables

Dans tout ce paragraphe M sera un espace topologique paracompact *i.e.* M est séparé et tel que tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert plus fin et localement fini.

1.1. Définition. *On dira que M est une* **variété topologique** *de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ i.e. il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.*

Pour connaître un point x de U, il suffit donc de connaître les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison on dira que U est un *ouvert de coordonnées locales* de M au voisinage de x. La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$ seront les *coordonnées* de x. Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans U et ses coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans V. Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & \| \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif on doit avoir

$$(x'_1, \ldots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n). \tag{I.1}$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ). Souvent on a besoin d'une certaine régularité de cette application ; ce qui nous amène à définir la notion de *variété différentiable* de classe C^r où $r \in \mathbb{N}$.

Dorénavant M sera une variété topologique de dimension n.

1.2. Définition. *Deux cartes locales (U, φ) et (V, ψ) sont dites C^r-***compatibles** *si l'une des conditions suivantes est remplie* *i)* $U \cap V = \emptyset$,

ii) $U \cap V \neq \emptyset$ *et* $\psi^{-1} \circ \varphi$ *est un difféomorphisme de classe* C^r *; ceci a un sens car cette application est définie sur un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

Un ensemble de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sur M est appelé C^r-*atlas* si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de M et si deux cartes quelconques (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont C^r-compatibles. Deux C^r-atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ sont dits *équivalents* si leur réunion est un C^r-atlas *i.e.* pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, les cartes (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont C^r-compatibles.

1.3. Définition. *Une classe d'équivalence de* C^r*-atlas est appelée* ***structure différentiable*** *de classe* C^r *sur* M*. On dira que* M *est une variété de classe* C^r.

Pour $r = 0$, M est une variété topologique (notion qu'on a déjà définie). Pour $r = \infty$ on dira que M est une *variété différentiable.* On dira que M est une *variété analytique* (réelle) ou de classe C^ω si elle admet un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ tel que les applications $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ (pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) soient analytiques en tant qu'applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Il est clair que toute variété analytique est une variété différentiable de classe C^r pour tout $r = 1, \ldots, \infty$.

Tout ouvert non vide d'une variété C^r *de dimension* n *est une variété de classe* C^r *de dimension* n.

Une variété de classe C^r (avec $r \geq 1$) M est dite *orientable* si elle peut être définie à l'aide d'un atlas (U_i, φ_i) pour lequel les C^r-difféomorphismes (I.1) préservent l'orientation de $\mathbb{R}^n$: pour $x \in U_i \cap U_j$, le déterminant de l'application linéaire $d\left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\right)\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)$ est strictement positif.

Dans toute la suite de cette section on ne considérera que les variétés de classe C^∞ connexes.

1.4. Exemples

Souvent nous ne spécifierons que la manière d'obtenir les cartes. Le lecteur peut vérifier lui-même leur compatibilité. On peut obtenir les exemples de variétés de différentes manières. Il est clair que le premier exemple est l'espace $\mathbb{R}^n$ lui-même puisqu'il constiue le *modèle local.*

i) Sous-variéts de $\mathbb{R}^N$

Soient N et N' deux entiers naturels. Une application différentiable $\mathbb{R}^N \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{N'}$ est dite de *rang constant*, si le rang de l'application linéaire $d_x f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N'}$ (différentielle de f au point x) ne dépend pas de x. On dira que f est une *immersion* si, en tout point x de M, $d_x f$ est injective ; dans ce cas évidemment $N \leq N'$. On dira que f est une *submersion* si pour tout $x \in M$, $d_x f$ est surjective ; dans ce cas $N \geq N'$. Supposons $N = n+q$, $N' = q$ et posons pour tout $c \in f(\mathbb{R}^N)$:

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = c\}.$$

Si f est de rang constant (en particulier si f est une submersion) on peut montrer, en utilisant le *théorème des fonctions implicites*, que Σ est une variété différentiable de dimension n. On dira que f est une *fonction definissant* Σ.

Beaucoup de variétés sont obtenues de cette manière ; par exemple la sphère de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathbb{S}^{n+1} = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad : \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}.$$

Le cas $n = 1$ donne le cercle qu'on peut voir aussi comme l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On peut voir d'une autre manière assez facilement la structure de variété (analytique) de dimension n sur la sphère $\mathbb{S}^n$. Faisons-le pour $n = 2$. Considérons le recouvrement suivant $U_1 = \mathbb{S}^2 - \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 - \{S\}$ où N et S sont respectivement le *pôle nord* et le *pôle sud* de la sphère. Alors l'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{-1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2}\right)$$

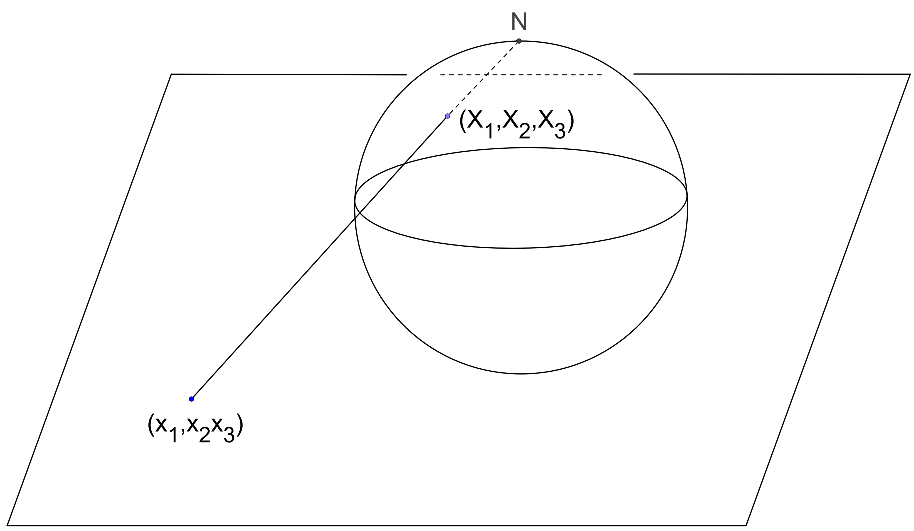


Fig. I.1

est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur U_1. L'application inverse est donnée par

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 - X_3}, \frac{X_2}{1 - X_3}\right)$$

De même l'application $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2$ donnée par

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2} \right)$$

est aussi un homéomorphisme ; l'inverse $\varphi_2^{-1} : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a pour expression

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 + X_3}, \frac{X_2}{1 + X_3} \right).$$

L'application de changement de cartes

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

est définie par

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

qui est clairement analytique réelle ainsi que son inverse. Nous avons donc exhibé explicitement un atlas analytique de la sphère $\mathbb{S}^2$. Les applications φ_1^{-1} et φ_2^{-1} sont appelées *projections steréographiques* de pôles respectifs N et S.

On appelle *sous-variété de dimension* n de $\mathbb{R}^N$ toute partie fermée M telle que, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application différentiable $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$ définissant $M \cap U$.

En fait *toute variété différentiable M de dimension n peut être considérée comme sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^N$ pour N suffisamment grand* (c'est le *théorème de plongement* de Whitney [Wh] ; le cas analytique est dû à Grauert [Gr]).

ii) Produit de variétés

Soient M et N deux variétés différentiables (resp. analytiques) de dimensions respectives n et q. Alors le produit cartésien $M \times N$ est une variété différentiable (resp. analytique) de diemnsion $n + q$. De manière générale le produit cartésien d'un nombre fini de variétés différentiables (resp. analytiques) est une variété différentiable (resp. analytique) de dimension la somme des dimensions. Par exemple le produit de n exemplaires du cercle $\mathbb{S}^1$ est une variété de dimension n appelée *n-tore réel* $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$. Nous verrons que $\mathbb{T}^n$ est une variété sur laquelle on peut mener beaucoup de calculs de manière plus aisée que sur d'autres.

iii) L'espace projectif réel

Soit $n \geq 1$ un entier. Sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ on considère la relation d'équivalence suivante $x \sim y$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul tel que $y = \lambda x$. L'ensemble quotient

$$P^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

est appelé *espace projectif réel* de dimension n. Nous allons montrer qu'il possède une structure de variété analytique réelle.

Il est évident que $P^n(\mathbb{R})$ est l'ensemble $\{D\}$ des droites D passant par l'origine. Soit $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ et notons H_i l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $x_i = 1$. Alors toute droite $D \in P^n(\mathbb{R})$ non parallèle à H_i peut être repérée par son point d'intersection P avec H_i qui a pour coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, 1, \xi_i, \ldots, \xi_n)$; il est bien entendu déterminé par sa projection P' de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ sur le sous-espace horizontal $H_i' = \mathbb{R}^n$ d'équation $x_i = 0$ (cf. Fig. I.2).

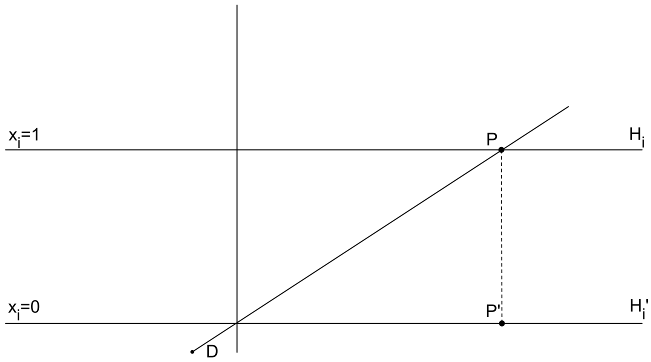


Fig. I.2

L'ensemble des droites D qui rencontrent H_i est un ouvert U_i de $P^n(\mathbb{R})$. On définit l'application $\varphi_i^{-1} : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi_i^{-1}(D) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n).$$

On peut calculer les coordonnées $\varphi_i^{-1}(D) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ en fonction de celles d'un point quelconque $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de la droite D ; elles sont données par

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \xi_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, \xi_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \xi_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

On a donc un système de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i=1,\ldots,n+1}$. Vérifions la compatibilité analytique entre deux cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) avec $i \neq j$. Soient $x \in U_i \cap U_j$, $\varphi_i^{-1}(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ et $\varphi_j^{-1}(x) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta_j, \ldots, \zeta_n)$ avec d'une part

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \xi_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, \xi_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \xi_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}$$

et d'autre part

$$\zeta_1 = \frac{x_1}{x_j}, \ldots, \zeta_{j-1} = \frac{x_{j-1}}{x_j}, \zeta_j = \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \zeta_n = \frac{x_{n+1}}{x_j}.$$

Supposons $i < j$; alors les relations suivantes sont évidentes à établir

$$
\text{(I.2)} \qquad \begin{cases} \xi_1 & = \frac{\zeta_1}{\zeta_i} \\ \dots & = \dots \\ \xi_{i-1} & = \frac{\zeta_{i-1}}{\zeta_i} \\ \xi_i & = \frac{\zeta_{i+1}}{\zeta_i} \\ \dots & = \dots \\ \xi_{j-2} & = \frac{\zeta_{j-1}}{\zeta_i} \\ \xi_{j-1} & = \frac{1}{\zeta_i} \\ \xi_j & = \frac{\zeta_j}{\zeta_i} \\ \dots & = \dots \\ \xi_{n-1} & = \frac{\zeta_{n-1}}{\zeta_i} \end{cases}
$$

Ceci montre que les coordonnées ξ_i dépendent analytiquement des coordonnées ζ_j ; autrement dit $P^n(\mathbb{R})$ possède une structure de variété analytique réelle.

1.5. Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives n et p.

i) Définition. *On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est **différentiable** au point $x \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant x et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^p$$

*est différentiable. On dira que f est **différentiable**, si elle est différentiable en tout point de M.*

En particulier, on dira qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ), la fonction

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable. La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x)).$$

Si f est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable, on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension.

On notera $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N et simplement $C^\infty(M)$ lorsque $N = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des difféomorphismes d'une variété sur elle-même est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Diff}(M)$.

ii) Partition de l'unité.

C'est l'un des instruments les plus puissants en Analyse sur les variétés ; il permet de recoller des objets définis localement en objets globaux.

Soient M une variété et $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. On appelle *support* de ρ et on note $\mathrm{supp}(\rho)$ l'adhérence de l'ensemble

$$\{x \in M : \rho(x) \neq 0\}.$$

Soit $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\rangle)_\rangle$ un recouvrement ouvert de M. On dira que $\mathcal{U}$ est *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de la famille $\mathcal{U}$. Sur une variété différentiable (paracompacte comme cela a été supposé avant) un tel recouvrement existe toujours ; on peut même le choisir dénombrable.

Soit $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\rangle)_\rangle$ un recouvrement localement fini sur M. On appelle *partition de l'unité subordonnée* à $\mathcal{U}$ une famille de fonctions réelles différentiables positives $(\rho_i)_i$ telles que

- pour tout $i \in I$, *supp*(ρ_i) est contenu dans U_i,
- $\sum_i \rho_i = 1$.

iii) Proposition. *Tout recouvrement localement fini* $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\rangle)_{\rangle \in \mathcal{I}}$ *admet une partion de l'unité différentiable* $(\rho_i)_{i\in I}$.

Par contre il n'existe pas de partition de l'unité analytique : si ρ_i était analytique, elle serait nulle sur la composante connexe contenant l'ouvert U_i- $\mathrm{supp}(\rho_i)$.

1.6. Variétés à bord

Notons $\mathbb{H}^n$ le demi-espace $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. Une *variété topologique à bord* est un espace topologique M paracompact dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{H}^n$. Pour avoir de la régularité, on aura besoin de la définition suivante. Une application f d'un ouvert V de $\mathbb{H}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ est dite *différentiable* de classe C^r s'il existe un ouvert $\widetilde{V}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant V et une appliaction $\widetilde{f}$ de classe C^r de $\widetilde{V}$ dans $\mathbb{R}^q$ dont la restriction à V est égale à f.

On dira que M est une *variété différentiable à bord* (de classe C^r) s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de M et, pour tout $i \in I$, un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{H}^n \longrightarrow U_i$ tels que, pour tous $i, j \in I$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de coordonnées

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{H}^n \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{H}^n$$

soit de classe C^r. C'est donc la même définition que celle que l'on a donnée pour les variétés sans bord mais avec un modèle local différent (légèrement !). On peut montrer facilement que le *bord* d'une variété à bord de dimension n est une variété (de même classe de différentiabilité) de dimension $n-1$; elle est sans bord et est notée habituellement ∂M.

Si M est orientée, ∂M hérite d'une orientation canoniue : elle est induite par celle de M ; cette observation est très importante, elle intervient dans la formule de Stokes que nous donnerons ultérieurement.

Il existe beaucoup d'exemples de variétés à bord : par exemple les boules fermées dans les espaces numériques $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: le bord est sphère ; si on enlève une sous-variété N de codimension 1 d'une variété sans bord, on obtient des variétés à bord dont le bord est difféomorphe à N.

2. Variétés complexes

Elles se définissent de la même manière que les variétés différentiables : la notion de difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ sera remplacée par celle d'application biholomorphe entre ouverts de $\mathbb{C}^n$. Nous commencerons par rappeler brièvement la notion de fonction holomorphe, d'abord d'une variable complexe, ensuite de plusieurs variables complexes. Dans toute la suite, $\mathbb{C}^n$ sera identifié à $\mathbb{R}^{2n}$ à l'aide de l'application

$$(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n. \tag{I.3}$$

Soient U ou ouvert de $\mathbb{C}$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Alors la différentielle de φ en un point z quelconque de U est une application $\mathbb{R}$-linéaire $d\varphi_z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice

$$d\varphi_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(z) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(z) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(z) \end{pmatrix}$$

où φ_1 et φ_2 sont les composantes de φ *i.e.* $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ et $z = x + iy$.

2.1. Définition. *On dira que φ est **holomorphe** en z si la différentielle $d_z\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire (via l'identification* (II.3) *entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$). On dira que φ est holomorphe sur U si elle est holomorphe en tout point de U.*

Si φ est holomorphe sur U, les coefficients de la matrice $d_z\varphi$ en tout point $z \in U$ vérifient les égalités (dites de *conditions de Cauchy-Riemann*)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(z) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(z) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(z). \tag{I.4}$$

On peut aussi écrire

$$d_z\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

où les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sont donnés par

$$\text{(I.5)} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

On peut vérifier facilement que φ est holomorphe sur U si, et seulement si, la dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}$ y est identiquement nulle.

La fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si, et seulement si, elle est *analytique* sur U *i.e.* pour tout point $z_0 \in U$, il existe un nombre $\rho(z_0) > 0$ tel que φ soit développable en série entière sur le disque ouvert de centre z_0 et de rayon $\rho(z_0)$ *i.e.*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0) \qquad \text{pour} \qquad |z - z_0| < \rho(z_0)$$

où les a_n sont des constantes complexes.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Notons $(z_1, \dots, z_n)$ les coordonnées complexes d'un point $z \in U$ et $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ ses coordonnées réelles où, pour tout $k = 1, \dots, n$, $z_k = x_k + iy_k$. Pour toute fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1, on pose

$$\partial\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} dz_k \quad \text{et} \quad \overline{\partial}\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k$$

où

$$\text{(I.6)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right). \end{cases}$$

Alors $d\varphi = \partial\varphi + \overline{\partial}\varphi$ où, pour tout point $z \in U$, $\partial_z\varphi$ et $\overline{\partial}_z\varphi$ sont des 1-formes complexes $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}^n$. La première est $\mathbb{C}$-linéaire et la deuxième est $\mathbb{C}$-antilinéaire. On dira que φ est *holomorphe*, pour tout point $z \in U \subset \mathbb{C}^n$, la 1-forme $d_z\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire *i.e.* si la partie antilinéaire $\overline{\partial}_z\varphi$ est nulle.

2.2. Définition. *On dira que φ est* ***holomorphe*** *au point $z \in U \subset \mathbb{C}^n$ si la 1-forme $d_z\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire i.e. si la partie antilinéaire $\overline{\partial}_z\varphi$ est nulle. On dira que φ est holomorphe sur U si elle est holomorphe en chaque point de U.*

De manière analogue au cas d'une variable, une fonction complexe φ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, est holomorphe si, et seulement si, elle est *analytique* sur U *i.e.* pour tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in U$, il existe n nombres réels strictement positifs $\rho_1, \dots, \rho_n$ tels que φ soit développable en série entière sur le polydisque

$$\mathbb{D}^n = \{(w_1, \dots w_n) \in U \ : \ |w_k - z_k| < \rho_k, \ \ k = 1, \dots, n\}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(w) = \sum_{k_1 \ldots k_n} c_{k_1 \ldots k_n} (w_1 - z_1)^{k_1} \ldots (w_n - z_n)^{k_n} \quad \text{pour} \quad w \in \mathbb{D}^n.$$

Si $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est une fonction définie sur un ouvert $U \in \mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^m$ on dira que φ est *holomorphe* sur U si chacune de ses composantes φ_ℓ, $\ell = 1, \ldots, m$ est holomorphe en tant que fonction définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Une *application biholomorphe* d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{C}^m$ est une application bijective $\varphi : U \longrightarrow V$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient holomorphes. Dans ce cas, on a nécessairement $n = m$. On dira que les deux ouverts U et V de $\mathbb{C}^n$ sont *holomorphiquement équivalents.*

On est maintenant en mesure de donner la notion de *variété analytique complexe.* Soit M une variété topologique de dimension $2n$.

2.3. Définition. *On dira que M est une* ***variété analytique complexe*** *de dimension n si elle admet un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où, pour tout $i \in I$, φ_i est un homéomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ sur U_i tel que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ l'homéomorphisme*

$$\varphi_j \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n$$

soit biholomorphe.

Par définition même, toute variété analytique complexe est munie naturellement d'une structure de variété analytique réelle.

Tout ouvert d'une variété analytique complexe (en particulier tout ouvert de $\mathbb{C}^n$) est une variété analytique complexe de même dimension.

2.4. Exemples

Ils seront définis de manière presque similaire que pour le cas réel. Evidemment le premier exemple de variété analytique complexe de dimension n est l'espace $\mathbb{C}^n$.

i) Sous-variétés de $\mathbb{C}^N$

Soient $N = n + q$ et $f : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^q$ une application holomorphe telle que $c \in f(\mathbb{C}^N)$. On pose

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : f(z) = c \right\}.$$

Supposons qu'en tout point $z = (z_1, \ldots, z_N) \in M$, la différentielle

$$d_z f : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^q$$

(qui est une application $\mathbb{C}$-linéaire) soit de rang maximum. *Alors la version complexe du théorème des fonctions implicites montre que M possède une structure de variété analytique complexe de dimension n.* On dira que f est une *fonction définissant M.*

Contrairement au cas réel, il existe beaucoup de variétés analytiques complexes qui ne peuvent pas être obtenues de cette manière : il n'existe pas de version holomorphe du *théorème de plongement de Whitney*. Par exemple les variétés analytiques complexes compactes de dimension strictement positive ne peuvent jamais être plongées (de manière holomorphe bien sûr) dans un $\mathbb{C}^N$.

ii) La sphère $\mathbb{S}^2$

Reprenons les notations de 1.4. i). On a deux ouverts

$$U_1 = \mathbb{S}^2 - \{N\} \quad \text{et} \quad U_2 = \mathbb{S}^2 - \{S\}$$

et deux applications $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^3$ qui, en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et en posant $z = x_1 + ix_2$, peuvent sécrire sous la forme

$$\varphi_1(z) = \left(\frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}}, \frac{i(\overline{z}-z)}{1+z\overline{z}}, \frac{-1+z\overline{z}}{1+z\overline{z}} \right)$$

et

$$\varphi_2(z) = \left(\frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}}, \frac{i(\overline{z}-z)}{1+z\overline{z}}, \frac{1-z\overline{z}}{1+z\overline{z}} \right).$$

Leurs inverses s'écrivent respectivement

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1}{1-X_3} + i\frac{X_2}{1-X_3}$$

et

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1}{1+X_3} + i\frac{X_2}{1+X_3}.$$

On pose $\psi_1 = \varphi_1 \circ *$ où $* : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est la conjugaison complexe et $\psi_2 = \varphi_2$. Il est alors facile de vérifier que l'application

$$\psi_1^{-1} \circ \psi_2 : \psi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* \longrightarrow \psi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$$

s'écrit $\psi_1^{-1} \circ \psi_2(z) = \frac{1}{z}$ et est donc une transformation biholomorphe de $\mathbb{C}^*$.

L'atlas $(U_i, \psi_i)_{i=1,2}$ munit donc la sphère $\mathbb{S}^2$ d'une structure de variété analytique complexe de dimension 1.

iii) L'espace projectif complexe

De manière analogue au cas réel, sur $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ on considère la relation d'équivalence

$$z \sim w \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } w = \lambda z.$$

Le quotient $P^n(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ par cette relation d'équivalence est appelé *espace projectif complexe* de dimension n. On peut montrer, en suivant exactement la démarche entreprise pour le cas réel, que $P^n(\mathbb{C})$ possède une structure de variété analytique complexe de dimension n : il suffit de remplacer tout objet réel par son analogue complexe. Les changements de cartes sont donnés par les mêmes expressions (II.2) qui montrent qu'ils sont biholomorphes.

2.5. Applications holomorphes

Soient M et N deux variétés analytiques complexes de dimensions respectives n et q.

On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est ***holomorphe*** *au point $z \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U,φ) contenant z et toute carte locale (V,ψ) de N contenant $f(z)$ et tout voisinage ouvert W de z contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^q$$

est holomorphe au point $\psi^{-1}(z)$. On dira que f est ***holomorphe*** *si elle est holomorphe en tout point de M.*

Une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si pour toute carte locale (U,φ) la fonction

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe au sens de la définition 2.2.

Si f est holomorphe, bijective et f^{-1} holomorphe on dira que f est un *biholomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension.

On notera $\mathcal{H}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ l'ensemble des applications holomorphes de M dans N et simplement $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ lorsque $N = \mathbb{C}$; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des biholomorphismes (ou automorphismes) d'une variété analytique complexe est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Aut}(M)$; c'est bien sûr un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$.

Une variété différentiable ou analytique complexe est dite *connexe, compacte etc.* si elle est connexe, compacte *etc.* en tant qu'espace topologique. Par exemple $\mathbb{S}^2$, $P^n(\mathbb{R})$ et $P^n(\mathbb{C})$ sont des variétés connexes compactes. Nous donnerons par la suite un procédé de construction permettant de diversifier les exemples de variétés différentiables et analytiques complexes.

3. Espaces tangents

Nous traiterons d'abord le cas réel. Soient M une variété différentiable et $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ un atlas définissant M. On a vu qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si, pour tout $i \in I$, la fonction

$$f \circ \varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi_i)}{\partial x_k}(\varphi_i^{-1}(x)).$$

Pour tout $k = 1, \ldots, n$, on obtient donc un opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U_i associe la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U_i$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ sont linéairement indépendants. Si (U_j, φ_j) est une autre carte locale de système de coordonnés $(x'_1, \ldots, x'_n)$ un point $x \in U_i \cap U_j$ est repéré par ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans U_i et ses coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans U_j et on a

$$(x'_1, \ldots, x'_n) = \varphi_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$$

avec $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$. Il est alors facile de montrer que, pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial x'_\ell}{\partial x_k}(x) \frac{\partial}{\partial x'_\ell}(x). \tag{I.7}$$

En tout point $x \in M$ les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ engendrent donc sur $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension n indépendant de la carte choisie (U_i, φ_i) pour le définir.

3.1. Définition. *On appelle* **espace tangent** *à M en x, l'espace vectoriel T_xM engendré par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U_i, φ_i).*

Pour les variétés qui sont plongées dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$, on peut percevoir de manière très concrète la notion d'espace tangent.

3.2. Courbe Γ dans $\mathbb{R}^2$

La notion d'espace tangent étant purement locale on peut supposer qu'au voisinage d'un point $a \in \Gamma$ de coordonnées (a_1, a_2) la courbe est définie par une équation explicite du type $x_2 = f(x_1)$ où f est une fonction de classe C^∞ sur $]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$. L'espace tangent à la courbe Γ au point a n'est rien d'autre que la droite affine de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $x_2 - a_2 = f'(a_1)(x_1 - a_1)$ qui peut encore s'écrire, si on pose $F(x_1, x_2) = f(x_1) - x_2$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) = 0$$

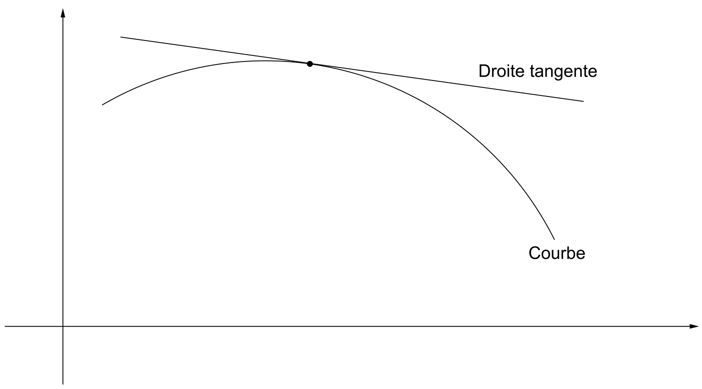


Fig. I.3

3.3. Sous-variétés de codimension 1

Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ définie localement sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ par une équation du type

$$F(x_1, \ldots, x_N) = 0$$

où $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞, alors l'espace tangent à M au point $a = (a_1, \ldots, a_N)$ est le noyau de la forme affine sur $\mathbb{R}^N$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k).$$

Par exemple la sphère $\mathbb{S}^{N-1}$ de $\mathbb{R}^N$ est définie par l'équation

$$F(x_1, \ldots, x_N) = 1 - \sum_{k=1}^{N} x_k^2 = 0$$

et a pour espace tangent au point $a = (\frac{1}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{N}})$ l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^N$ d'équation

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = \sqrt{N}.$$

Soit maintenant h une application différentiable d'une variété M de dimension n dans une variété N de dimension q. On supposera que M et N sont définies par les atlas respectifs $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ et, pour ne pas alourdir les notations, on fera comme si les ouverts de coordonnées U_i et V_j étaient en fait les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^q$. Pour tout $x \in M$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ l'application h définit une application linéaire

$$d_x h : T_x M \longrightarrow T_{h(x)} N$$

qui à tout opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}(x)$, k variant de 1 à n, associe l'opérateur $d_xh\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$ donné sur une fonction $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$d_xh\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)(f) = \sum_{\ell=1}^{q} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k}(x)\frac{\partial f}{\partial y_\ell}(h(x))$$

où $(y_1, \ldots, y_q)$ sont les coordonnées du point $h(x)$ pour tout $x \in M$. On peut vérifier que la définition de l'application d_xh ne dépend pas du système de coordonnées locales. On l'appelle *application tangente* à h au point $x \in M$.

Soit M une variété différentiable définie par un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. Pour tout $i \in I$ on pose

$$\Omega_i = \bigcup_{x\in U_i} T_xM.$$

Alors l'application $\Phi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega_i$ définie par

$$\Phi_i(x, f_1, \ldots, f_n) = \left(x, \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$$

est une bijection. On munit Ω_i de l'unique topologie $\mathcal{T}_\rangle$ pour laquelle l'application Φ_i est un homéomorphisme ($U_i \times \mathbb{R}^n$ étant muni de la topologie produit). De cette façon on définit une structure de variété topologique de dimension $2n$ sur l'ensemble

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$$

à l'aide de l'atlas (Ω_i, Φ_i). (La topologie sur TM est celle engendrée par les $\mathcal{T}_\rangle$.) En fait TM est une variété différentiable. En effet l'application

$$\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i : \Phi_i^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \Phi_j^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

s'écrit

$$\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i(x, u_x) = \left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(x), d_x(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(u_x)\right)$$

et montre bien que $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\Phi_i^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j)$ sur $\Phi_j^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j)$.

On a une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ définie par $\pi(x, u_x) = x$.

3.4. Définition. *On appelle* ***fibré tangent*** *à M la variété TM et la projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$.*

On a, pour tout couple (i, j) vérifiant $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, une application

$$\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

définie par $\gamma_{ij}(x) = d_x\left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\right)$. Sur l'intersection $U_i \cap U_j \cap U_k$, les applications γ_{ij} vérifient la condition

$$\gamma_{ik} = \gamma_{jk} \circ \gamma_{ij}$$

On dira que $(U_i, \gamma_{ij})_{i,j \in I}$ est un *cocycle* définissant le fibré (TM, π). Le fibré tangent à M peut être vu comme une collection d'espaces vectoriels isomorphes à $\mathbb{R}^n$ (les espaces tangents aux différents points) paramétrée par M.

3.5. Définition. *On appelle* ***section*** *de TM ou* ***champ de vecteurs*** *sur M toute application $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = id_M$.*

Sur une carte locale (U_i, φ_i) de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, un champ de vecteurs a pour expression

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \tag{I.8}$$

où les f_k sont des fonctions de classe C^∞ sur U_i. L'ensemble $C^\infty(TM)$ des champs de vecteurs sur M, ou des sections C^∞ du fibré TM, est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞. On peut y définir une structure multiplicative de la façon suivante : soient X et Y deux champs de vecteurs sur M ; on peut les écrire localement

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \ \text{ et } \ Y_i(x) = \sum_{\ell=1}^{n} g_\ell(x) \frac{\partial}{\partial x_\ell}(x)$$

Un calcul facile montre que pour toute fonction $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, on a

$$X_i(Y_i(h)) - Y_i(X_i(h)) = \sum_{k,\ell} \left(f_k \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_\ell} - g_\ell \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right).$$

On définit ainsi un nouveau champ (local) de vecteurs $X_iY_i - Y_iX_i$; on montre que ceci ne dépend pas de la carte choisie ; on obtient alors un champ de vecteurs global $XY - YX$ qu'on note $[X, Y]$ et qu'on appelle *crochet* de X et Y ; $[X, Y]$ est le commutateur de X et Y vus comme opérateurs (*différentiels d'ordre* 1) sur $C^\infty(M)$. On vérifie facilement l'identité suivante dite *identité de Jacobi* :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [Y, X]] = 0 \tag{I.9}$$

On dira que $(C^\infty(TM), [\ ,\ ])$ est l'*algèbre de Lie* des champs de vecteurs sur M.

Une variété M (de dimension n) est dite *parallélisable* s'il existe un difféomorphisme $\Phi : M\times\mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ tel que pour tout point x de M, l'application induite $\Phi_x : \{x\}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels. On dira alors que le fibré tangent TM est *trivial* et que Φ en est une *trivialisation.* La "parallélisabilité" se traduit aussi par l'existence de n champs de vecteurs tangents partout linéairement indépendants ; dans ce cas le $C^\infty(M)$-module $C^\infty(TM)$ est *libre* de rang n.

En général le fibré $TM \longrightarrow M$ n'est pas trivial mais tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que $TU \longrightarrow U$ soit trivial ; on dira que TM est *localement trivial.* La trivialité locale du fibré tangent découle automatiquement de la manière dont il a été construit.

Le fibré tangent à une variété est un cas particulier d'une notion plus générale : celle de *fibré vectoriel* que nous étudierons par la suite.

3.6. Cas d'une variété complexe

Soit M une variété complexe de dimension n. Au voisinage de chaque point $z \in M$ on a un système de coordonnées locales (holomorphes) $(z_1,\ldots,z_n)$. On a, pour tout $k=1,\ldots,n$, $z_k = x_k + y_k$ et $(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)$ est un système de coordonnées locales pour la structure de variété différentiable sous-jacente. Comme

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \qquad k=1,\ldots,n$$

ces champs engendrent au point z, l'espace $T_zM\otimes\mathbb{C}$ qui s'écrit donc sous la forme

$$T_zM\otimes\mathbb{C} = T_z^{10}M \oplus T_z^{01}M$$

où $T_z^{10}M$ et $T_z^{01}M$ sont les sous-espaces de $T_zM\otimes\mathbb{C}$ engendrés (sur $\mathbb{C}$) respectivement par les systèmes libres $\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)$. Ceci donne lieu à une décomposition du fibré $TM\otimes\mathbb{C}$ sous la forme

$$TM\otimes\mathbb{C} = T^{10}M \oplus T^{01}M.$$

Les fibrés $T^{10}M$ et $T^{01}M$ sont appelés respectivement *fibré tangent holomorphe* et *fibré tangent antiholomorphe* de M. Une section de $T^{10}M$ (resp. de $T^{01}M$) est dite *champ de vecteurs de type* $(1,0)$ (resp. de *type* $(0,1)$).

Sur l'espace vectoriel T_zM on a un opérateur réel $J_z : T_zM \longrightarrow T_zM$ défini, pour tout $k=1,\cdots,n$, par

$$J_z\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \ \text{ et } \ J_z\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Il vérifie $J^2 = -id$. Et évidemment l'application qui à z associe $J_z \in \mathrm{End}(T_zM)$ est C^∞ (voir le chapitre *fibrés vectoriels* pour la signification de cette notion). L'endomorphisme J

permet de munir chaque espace tangent T_zM d'une structure d'espace vectoriel complexe : multiplier par i revient à appliquer J. On dira que J est une *structure presque complexe* sur M (c'est celle associée à la structure complexe de M).

Réciproquement soit M une variété différentiable de dimension $2n$. On appelle *structure presque complexe* sur M la donnée, pour chaque $z \in M$, d'un élément $J_z \in \mathrm{End}(T_zM)$ variant différentiablement en fonction de z et vérifiant $J^2 = -id$. Une question naturelle est alors de savoir quand la structure presque complexe J provient-elle d'une structure complexe. Quand c'est le cas on dit que J est *intégrable*. Le défaut d'intégrabilité est mesuré par la quantité suivante appelée *tenseur de Nijenhuis* (*cf.* [KN]) :

$$N(X,Y) = \frac{1}{4}\Big\{[X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - J[X,Y]\Big\} \tag{I.10}$$

où X et Y sont des champs tangents à M. En fait les assertions suivantes sont équivalentes

i) si X et Y sont de type $(1,0)$, il en est de même pour $[X,Y]$;
ii) si X et Y sont de type $(0,1)$, il en est de même pour $[X,Y]$;
iii) J est intégrable ;
iv) le tenseur N est identiquement nul.

On appelle *champ de vecteurs holomorphe* sur M toute section holomorphe du fibré $\pi : T^{10}M \longrightarrow M$ *i.e.* une application $Z : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ Z = id_M$ et pour tout système $(U,(z_1,\ldots,z_n))$ de coordonnées locales, Z a pour expression

$$Z(z) = \sum_{k=1}^{n} h_k(z)\frac{\partial}{\partial z_k}$$

où les h_k sont des fonctions holomorphes sur U. L'ensemble $\mathcal{O}(\mathcal{T}^{\infty\prime}\mathcal{M})$ des champs holomorphes sur M est un module sur l'anneau $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ des fonctions holomorphes.

4. Formes différentielles

Elles sont une version paramétrée des formes extérieures. Nous allons d'abord les introduire en supposant que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ensuite nous transposerons la définition dans le cas général par le biais des cartes locales (U_i,φ_i). Nous verrons aussi comment se transportent les formes différentielles par une application différentiable et comment, en degré maximum, elles définissent des mesures sur la variété.

4.1. Généralités

Supposons d'abord que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit r un entier naturel et notons $\Lambda^r\mathbb{R}^n$ l'espace des r-formes extérieures sur $\mathbb{R}^n$. On appelle *forme différentielle de degré* r ou simplement *r-forme* sur M toute application $\alpha : M \longrightarrow \Lambda^r\mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Pour chaque $x \in M$, α_x est une r-forme linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des r-formes différentielles sur M est donc un espace vectoriel réel ; on le notera $\Omega^r(M)$. On voit que $\Omega^r(M) = \{0\}$ si $r > n$; on pose $\Omega^r(M) = \{0\}$ pour $r < 0$. Décrivons explicitement les espaces $\Omega^r(M)$.

i) $\underline{r = 0}$. On a $\Lambda^0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$; donc se donner une 0-forme c'est se donner une fonction C^∞, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

ii) $\underline{r = 1}$. Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On sait qu'en tout point $x = (x_1, \dots x_n) \in M$ la différentielle $d_x f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ *i.e.* $d_x f$ est un élément de $\Lambda^1\mathbb{R}^n$; elle a pour expression

$$d_x f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Les 1-formes $dx_1, \dots, dx_n$ sont les différentielles des fonctions coordonnées

$$x \in M \longmapsto x_i \in \mathbb{R} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Prises en un point, elles constituent une base de l'espace vectoriel $\Lambda^1\mathbb{R}^n$. Comme une 1-forme α sur M est une application $M \longrightarrow \Lambda^1\mathbb{R}^n$, elle s'écrit sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$$

où les α_i sont des fonction C^∞ sur M.

iii) $\underline{r \text{ quelconque}}$. En prenant tous les produits extérieurs possibles $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ pour $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ on définit une base de $\Lambda^r\mathbb{R}^n$. Ainsi toute r-forme différentielle α sur M est du type

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

où la somme porte sur tous les r-uplets $(i_1, \dots, i_r)$ tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ et les $\alpha_{i_1 \dots i_r}$ sont des fonctions C^∞ sur M. On pose

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Omega^r(M).$$

Deux formes différentielles $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$ s'écrivant

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \quad \text{et} \quad \beta = \sum \beta_{j_1 \dots j_s} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$$

ont pour produit extérieur

$$\alpha \wedge \beta = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} \beta_{j_1 \dots j_s} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$$

où la somme est étendue à tous les r-uplets $(i_1, \dots, i_r)$ et s-uplets $(j_1, \dots, j_s)$ tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$. On obtient ainsi une forme différentielle de degré $r + s$ sur M. On a bien sûr

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$$

et

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

L'espace $\Omega^*(M)$ est ainsi muni d'une structure d'*algèbre graduée anticommutative.* Le produit extérieur d'une r-forme et d'une fonction est une r-forme différentielle. Chaque espace vectoriel $\Omega^r(M)$ admet donc une structure de *module libre de rang* $N = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ sur l'anneau des fonctions C^∞ sur M (qui n'est rien d'autre que $\Omega^0(M)$).

4.2. Effet d'une application différentiable

Cette section reprend un peu la section 4 du chapitre I dans le contexte des formes différentielles. Soient M et N deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application C^∞. Alors pour tout point $x \in M$, la différentielle $d_x\varphi$ est une application linéaire de l'espace $\mathbb{R}^n$ dans l'espace $\mathbb{R}^p$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, elle induit une application linéaire

$$\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$$

définie pour toute r-forme β sur N de la façon suivante : pour tout point $x \in M$ et tout système de r vecteurs $(u_1, \ldots, u_r)$ de $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\varphi^*(\beta)(x)(u_1, \ldots, u_r) = \beta(\varphi(x))(d_x\varphi(u_1), \ldots, d_x\varphi(u_r)).$$

On dira que $\varphi^*(\beta)$ est l'*image réciproque* de β par φ. On peut préciser l'écriture à l'aide des composantes $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ de φ qui sont des fonctions réelles C^∞ sur M. Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ les coordonnées respectivement sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Alors pour tout $j = 1, \ldots, p$ la composante φ_j n'est rien d'autre que la composée $y_j \circ \varphi$, y_j étant considérée comme la projection $(y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p \longmapsto y_j \in \mathbb{R}$. Alors si β a pour écriture

$$\beta = \sum \beta_{j_1 \ldots j_r} dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_r}$$

celle de $\varphi^*(\beta)$ est

$$\varphi^*(\beta) = \sum (\beta_{j_1 \ldots j_r} \circ \varphi) d\varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{j_r}$$

ou encore

$$\varphi^*(\beta) = \sum (\beta_{j_1 \ldots j_r} \circ \varphi) \Delta_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

où la sommation porte sur tous les r-uplets $(i_1, \ldots i_r)$ et $(j_1, \ldots, j_r)$ vérifiant les inégalités $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ et les $\Delta_{i_1 \ldots i_r}(x)$ sont les déterminants des matrices jacobiennes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x_{i_1}}(x) & \ldots & \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x_{i_r}}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{j_r}}{\partial x_{i_1}}(x) & \ldots & \frac{\partial \varphi_{j_r}}{\partial x_{i_r}}(x) \end{pmatrix}.$$

Les propriétés essentielles de l'application $\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$ sont les suivantes :

(1) si φ est l'identité d'un ouvert $M \subset \mathbb{R}^n$ alors φ^* est l'identité de $\Omega^r(M)$ pour tout r ; si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L$ sont deux applications C^∞ alors $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

(2) Si φ est un difféomorphisme alors φ^* est un isomorphisme entre les algèbres graduées $\Omega^*(N)$ et $\Omega^*(M)$ et on a $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

Mettons-nous maintenant dans le cas général *i.e.* M n'est plus forcément un ouvert de $\mathbb{R}^n$ mais une variété quelconque définie comme on l'a dit par l'atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. On posera $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$.

Une *r-forme différentielle* sur M est une collection $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ où α_i est une r-forme sur l'ouvert $\varphi_i^{-1}(U_i)$ telle que sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$ on ait la condition de recollement

$$\alpha_i = \varphi_{ij}^*(\alpha_j). \tag{I.11}$$

L'espace des r-formes différentielles sur M sera toujours noté $\Omega^r(M)$. Toutes les propriétés qu'on vient de donner de l'espace $\Omega^r(M)$ dans le cas M difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ se transportent systématiquement au cas où M est une variété.

On conviendra que dorénavant l'écriture dans une carte locale $(U, x_1, \ldots, x_n)$ d'une r-forme α sur M sera

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1\ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \tag{I.12}$$

où la sommation est, comme d'habitude, étendue à tous les r-uplets d'entiers $(i_1, \ldots, i_r)$ avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$.

4.3. Intégration d'une forme volume

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$; la restriction de la mesure de Lebesgue $\lambda = dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n$ induit une mesure λ sur $\mathcal{O}$. Soient $\mathcal{O}'$ un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ un difféomorphisme de classe C^1.

Une fonction mesurable $f : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathbb{R}$ est λ-intégrable si, et seulement si, $f \circ \varphi$ est μ-intégrable (μ étant la mesure $|J(\varphi)|\lambda$ et $J(\varphi)$ le déterminant jacobien de φ) et on a en plus

$$\int_{\mathcal{O}'} f d\lambda = \int_{\mathcal{O}} f \circ \varphi |J(\varphi)| d\lambda.$$

Soit maintenant ω une n-forme différentielle à support compact sur $\mathbb{R}^n$; alors ω s'écrit $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ où f est une fonction à support compact. On définit l'intégrale de ω sur $\mathbb{R}^n$ comme étant le nombre

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n.$$

On vérifie facilement que, si $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \omega = (\text{signe de } J(\varphi)) \int_{\mathbb{R}^n} \omega.$$

Ceci étant, nous allons préciser quand et comment on peut *intégrer sur une variété* M. Supposons qu'elle est définie par un atlas $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\rangle, \varphi_\rangle)_{\rangle \in \mathcal{I}}$ où U_i est un recouvrement (localement fini de M). *Alors M est orientable si elle vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :*

i) Les déterminants jacobiens de tous les difféomorphismes de changement de cartes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ sont positifs ;

ii) Il existe sur M une forme différentielle v de degré n partout non nulle ; ω est appelée <u>forme volume</u> sur M.

Supposons M connexe orientée par la donnée d'une n-forme volume ω. Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité différentiable subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Alors la n-forme $\rho_i \omega$ est à support dans U_i et on a $\omega = \sum_{i \in I} \rho_i \omega$. Le nombre

$$\sum_{i \in I} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i^*(\rho_i \omega)$$

(s'il existe) *ne dépend ni du choix de l'atlas* (U_i, φ_i) *ni de la partition de l'unité* (ρ_i). On l'appelle *intégrale de ω sur M* et on note $\int_M \omega$. L'intégrale vérifie les propriétés de linéarité évidentes

$$\int_M \omega + \tau = \int_M \omega + \int_M \tau \qquad \text{et} \qquad \int_M \lambda \omega = \lambda \int_M \omega \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi toute forme volume ω sur M induit une mesure μ sur la variété définie, sur toute fonction f à support compact (et continue par exemple) par

$$\int_M f(x) d\mu(x) = \int_M f \omega.$$

CHAPITRE II

Actions de groupes et revêtements

Les actions de groupes apparaissent de façon naturelle dans beaucoup de branches des mathématiques et encore plus en topologie algébrique et différentielle ; ils en constituent un élément de base. Ce chapitre leur est dédié et à tout ce qui tourne autour : la notion de revêtement, celle d'objet géométrique invariant *etc.*

1. Actions de groupes

Dans cette section, nous présenterons de manière brève la notion d'action de groupes et nous l'utiliserons pour construire des exemples divers de variétés différentiables ou analytiques complexes.

1.1. La topologie quotient

Soit X un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Pour tout $x \in X$, on notera $\mathcal{O}_x$ sa classe d'équivalence. Si A est une partie de X, $\mathrm{Sat}(A)$ sera son saturé *i.e.* $\mathrm{Sat}(A) = \cup_{x\in A}\mathcal{O}_x$. On dira que $\mathcal{R}$ est *ouverte* si, pour tout ouvert A de X, $\mathrm{Sat}(A)$ est un ouvert de X. Soient $\mathcal{R}$ une telle relation d'équivalence, $X = M/\mathcal{R}$ le quotient et notons $\pi : M \longrightarrow X$ la projection canonique. On munit X de la *topologie quotient* : U est un ouvert de X si, et seulement si, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de M ; c'est la *plus fine des topologies* rendant continue l'application π.

Un *groupe topologique* est un groupe Γ muni d'une topologie pour laquelle les applications $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \gamma_1\gamma_2 \in \Gamma$ et $\gamma \in \Gamma \longrightarrow \gamma^{-1} \in \Gamma$ sont continues.

Soient Γ un groupe, M une variété et $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$, on notera $\mathrm{Diff}^r(M)$ le groupe des homéomorphismes de M de classe C^r *i.e.* un élément $h \in \mathrm{Diff}^r(M)$ est un homémorphisme de M tel que h et h^{-1} soient de classe C^r (analytiques pour $r = \omega$). Pour $r = 0$ on posera $\mathrm{Diff}^0(M) = \mathrm{Homéo}(M)$; bien sûr on a $\mathrm{Diff}^r(M) \subset \mathrm{Homéo}(M)$ pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$.

1.2. Définition. *On appelle* **action** *de classe* C^r *de* Γ *sur* M *une application continue* $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ *telle que*

i) $\Phi(e, x) = x$ *pour tout* $x \in M$, e *étant l'élément neutre de* Γ *;*

ii) $\Phi(\gamma\gamma', x) = \Phi(\gamma, \Phi(\gamma', x))$ *pour tous* $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ *et tout point* $x \in M$ *;*

iii) pour tout $\gamma \in \Gamma$, *l'application partielle* $\Phi(\gamma, \cdot) : x \in M \longrightarrow \Phi(\gamma, x) \in M$ *est un élément de* $\mathrm{Diff}^r(M)$.

La donnée d'une action Φ de classe C^r de Γ sur M permet de définir une représentation de Γ dans le groupe $\mathrm{Diff}^r(M)$ *i.e.* un morphisme de groupes $\rho : \gamma \in \Gamma \longmapsto \Phi(\gamma, \cdot) \in \mathrm{Diff}^r(M)$. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ sera confondu avec $\rho(\gamma)$ et pour tout point $x \in M$,

$\rho(\gamma)(x) = \Phi(\gamma, x)$ sera noté simplement γx. L'ensemble $\mathcal{O}_x = \{\gamma x \ : \ \gamma \in \Gamma\}$ est appelé *orbite* de x.

i) On dira que $x \in M$ est un *point fixe* de Φ si $\gamma x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $\mathrm{Fix}(\Phi)$ des points fixes de Φ est un fermé de M.

ii) Pour tout $x \in M$, posons $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \ : \ \gamma x = x\}$; alors Γ_x est un sous-groupe fermé de Γ appelé *groupe d'isotropie* de x.

iii) On dira que l'action Φ est *libre* si, pour tout $x \in M$, $\Gamma_x = \{e\}$.

iv) Une partie M_0 de M est dite *invariante* par Φ si, pour tout $x \in M_0$, l'orbite $\mathcal{O}_x$ est entièrement contenue dans M_0. On dira que Φ est *transitive* s'il existe x tel que l'orbite $\mathcal{O}_x$ soit égale à M. (Ceci sera donc vrai pour tout $x \in M$.)

Toute action Φ de Γ sur M définit une *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$:

$$x\mathcal{R}y \iff \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma x. \tag{II.1}$$

Cette relation d'équivalence est ouverte car, pour tout ouvert U de M, son saturé s'écrit

$$\mathrm{Sat}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$$

qui est donc un ouvert car, pour tout γ, γU est ouvert puisque γ est un difféomorphisme. On munit $X_\Phi = M/\Phi = M/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. On dira que l'action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ est :

v) *totalement discontinue* si tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ distincts, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 U = \emptyset$;

vi) *séparante* si tous points $x, y \in M$ non équivalents admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 V = \emptyset$;

vii) *propre* si, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est relativement compact (*i.e.* son adhérence est compacte) dans Γ (fini si Γ est discret).

Si Γ est fini et agit librement, alors il agit de façon séparante et totalement discontinue (démonstration laissée au lecteur).

On dira que deux actions Φ_1 et Φ_2 définies respectivement sur les variétés M_1 et M_2 sont *C^s-conjuguées*, s'il existe un homéomorphisme $h : M_1 \longrightarrow M_2$, de classe C^s tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \stackrel{\Phi(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ M_1 & \stackrel{\Phi(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_1. \end{array} \tag{$*$}$$

Dans toute la suite de cette section Γ sera un groupe topologique dénombrable et discret. Dans ce cas, si Γ agit librement et proprement, il agit de façon séparante et totalement discontinue. On conviendra aussi que le mot "C^k-homéomorphisme" signifiera homéomorphisme pour $k = 0$, difféomorphisme C^k si $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et difféomorphisme analytique si $k = \gamma$.

1.3. Proposition. *Soient M une variété de classe C^r $(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\})$ de dimension n et Φ une action libre et propre de classe C^r de Γ sur M. Alors le quotient $X_\Phi = M/\Phi$ est une variété de classe C^r de dimension n et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X$ est un difféomorphisme local C^r i.e. tout point $x \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un difféomorphisme de classe C^r. Si Ψ est une action C^s-conjuguée à Φ, les variétés X_Φ et X_Ψ sont C^s-homéomorphes.*

Si M est une variété complexe, on dira que Γ *agit holomorphiquement* sur M (ou que l'action de Γ est *holomorphe*) si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, le homéomorphisme $\gamma : x \in M \longmapsto \gamma x \in M$ est un *biholomorphisme* (*i.e.* γ est bijectif et γ et γ^{-1} sont holomorphes). La même définition de la conjugaison de deux actions se transpose au cas des variétés complexes : on demande à h dans le diagramme $(*)$ d'être holomorphe et on dira que les actions sont *holomorphiquement conjuguées.* On a une version complexe de la proposition 1.3.

1.4. Proposition. *Soient M une variété complexe de dimension n et Φ une action holomorphe, libre et propre de Γ sur M. Alors le quotient $X_\Phi = M/\Phi$ est une variété complexe de dimension n et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X_\Phi$ est un biholomorphisme local i.e. tout point $x \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un biholomorphisme. Si Ψ est une action holomorphiquement conjuguée à Φ, les variétés X_Φ et X_Ψ sont holomorphiquement équivalentes.*

Il est souvent utile de savoir s'il existe une partie de M (géométriquement intérssante) qui contient le moins possible d'éléments dans chaque orbite. Ceci nous amène à la définition qui suit.

1.5. Définition. *Soit Φ une action de classe C^r propre et discontinue de Γ sur une variété M. On appelle **domaine fondamental** de cette action toute partie fermée Δ de M telle que*

i) $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\Delta) = M$,
ii) $int(\Delta) \cap \gamma(int(\gamma\Delta)) = \emptyset$ *pour tout* $\gamma \neq$ *identité.*

L'ensemble $\partial\Delta = \Delta - int(\Delta)$ est le *bord* du domaine fondamental ; il est de mesure nulle (pour la mesure canonique de M : celle donnée par la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ à l'aide des cartes locales). La variété quotient $X = M/\Gamma$ est obtenue à partir de Δ en identifiant les points de $\partial\Delta$ qui sont Γ-équivalents.

Toute action de classe C^r propre et discontinue de Γ sur une variété différentiable M admet un domaine fondamental. Ce domaine est compact si, et seulement si, le quotient $X = M/\Gamma$ l'est.

Les quotients par des actions de groupes fournissent beaucoup d'exemples de variétés différentiables et analytiques complexes. Nous allons en donner quelques-uns.

1.6. Exemples

i) Soient $M = \mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par $\Phi(q, x) = x + \tau q$ où $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $q\tau = (q_1\tau_1, \ldots, q_n\tau_n)$. Alors Φ est une action analytique libre et propre ; le quotient M/Γ est une variété analytique réelle de dimension n. La structure différentiable sur M/Γ ne dépend pas du τ choisi. Cette variété est appelée *n-tore* et est notée $\mathbb{T}^n$. Pour $n = 2$, $\mathbb{T}^2$ est obtenu en identifiant, deux à deux, les côtés opposés d'un rectangle en respectant l'orientation.

ii) Soient $M = \mathbb{C}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^{2n}$, $\tau = (\tau_1, \tau_1' \ldots, \tau_n, \tau_n')$ un vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par

$$\Phi(q, z) = z + \tau q$$

où $z = (z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n$, $q = (q_1, {q'}_1 \cdots, q_n, {q'}_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$ et

$$q\tau = (q_1\tau_1 + i{q'}_1{\tau'}_1, \cdots, q_n\tau_n + i{q'}_n{\tau'}_n).$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre ; le quotient M/Γ est une variété complexe de dimension n appelée *n-tore complexe* et est notée $\mathbb{T}^n_\tau$. Contrairement au cas réel, sa structure complexe dépend du choix de $\tau \in \mathbb{R}^{2n}$. Par exemple, supposons $n = 1$; alors se donner $\tau \in \mathbb{R}^2$ revient à se donner $\tau = (1, \omega) \in \mathbb{H}$ où $\mathbb{H}$ est le demi-plan supérieur $\{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Les tores $\mathbb{T}^2_\tau$ et $\mathbb{T}^2_\sigma$ sont équivalents holomorphiquement (*i.e.* il existe un biholomorphisme $\mathbb{T}^2_\tau \longrightarrow \mathbb{T}^2_\sigma$) si, et seulement si, il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

telle que $\sigma = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Sur le tore réel $\mathbb{T}^2$, il y a donc une infinité de structures complexes, chacune d'elles est codée par $\tau \in \mathbb{H}$. Les classes d'équivalence de structures complexes sur $\mathbb{T}^2$ correspondent bijectivement aux points du quotient $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ appelé *orbifold modulaire.*

iii) Soient M la sphère $\mathbb{S}^n$, ensemble des vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant la relation $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$ et Γ le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ (qu'on peut aussi identifier au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ; Γ agit sur $\mathbb{S}^n$ de la façon suivante

$$\Phi : (\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{S}^n \longmapsto \gamma x \in \mathbb{S}^n.$$

L'action Φ est libre et le quotient $\mathbb{S}^n/\Gamma$ est une variété analytique réelle de dimension n ; c'est l'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$.

iv) Soient $M = \mathbb{C}^n - \{0\}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $0 < a < 1$. On définit une action de Γ sur M de la façon suivante

$$\Phi : (q, z) \in \Gamma \times M \longmapsto a^q z \in M.$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre. Le quotient M/Γ est une variété analytique complexe de dimension n appelée *surface de Hopf*. Comme exercice le lecteur pourrait démontrer que cette variété est difféomorphe à $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^1$.

2. Groupe fondamental

Nous introduisons sommairement le groupe fondamental pour en faire usage dans l'énoncé du théorème d'existence du revêtement universel que nous verrons dans la section 3. La théorie de l'homotopie dans son ensemble sera étudiée de façon plus détaillée par la suite.

Soit X un espace topologique séparé. On appelle *chemin* d'origine x_0 et d'extrémité x_1 toute application continue $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\sigma(0) = x_0$ et $\sigma(1) = x_1$.

L'espace X est dit *connexe par arcs* si, pour tous $x_0, x_1 \in X$, il existe un chemin dans X reliant x_0 à x_1. Si $x_0 = x_1$ on dira que σ est un *lacet* de base x_0. Fixons un point $x_0 \in X$.

Dans toute la suite on ne considérera que des espaces séparés connexes par arcs.

2.1. Définition. *Deux lacets σ_0 et σ_1 de base x_0 sont* ***homotopes*** *s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ telle que*

$$\begin{cases} H(t,0) = \sigma_0(t) \\ H(t,1) = \sigma_1(t) \\ H(0,s) = H(1,s) = x_0 \end{cases}$$

Cela signifie que le lacet σ_0 peut être déformé de manière continue tout en restant dans l'espace X et être amené sur le lacet σ_1. Par exemple, soit X le plan complexe privé de l'origine et choisissons $x_0 = 1$ comme point base. On voit que tous les lacets basés en x_0 n'ayant pas l'origine comme point intérieur sont homotopes. Mais le cercle trigonométrique (qui est bien sûr un lacet de base x_0) n'est homotope à aucun de ces lacets : l'origine est à l'intérieur et ne peut passer à l'extérieur par déformation continue que si l'on coupe le cercle ; ce qui n'est pas permis.

2.2. Composition des lacets

Soient σ_0 et σ_1 deux lacets dans X de base x_0. On définit un nouveau lacet basé en x_0 et noté $\sigma_0\sigma_1$ en posant

$$(\sigma_0\sigma_1)(t) = \begin{cases} \sigma_0(2t) & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma_1(2t-1) & \text{pour } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{II.2}$$

Le lacet $\sigma_0\sigma_1$ est obtenu en partant du point x_0, en décrivant le lacet σ_0 (pour t croissant), en revenant à x_0 et en décrivant ensuite σ_1 (toujours dans le sens t croissant) pour revenir encore une fois à x_0.

L'ensemble $\Omega(X, x_0)$ des lacets basés en x_0 se trouve ainsi muni d'une loi de composition interne. On vérifie facilement que si σ_0 est homotope à ${\sigma'}_0$ et σ_1 homotope à ${\sigma'}_1$ alors $\sigma_0\sigma_1$ est homotope à ${\sigma'}_0{\sigma'}_1$. Autrement dit l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ des classes d'homotopie de lacets est muni d'une loi de composition interne. Cette loi

i) est associative ;

ii) admet un élément neutre : la classe d'homotopie du lacet constant e défini par $e(t) = x_0$ pour tout $t \in [0, 1]$;

iii) est telle que toute classe d'homotopie $[\sigma]$ admet un inverse : la classe de σ^{-1} défini par $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t)$ *i.e.* le lacet σ est décrit dans le sens inverse.

L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ muni de cette loi de composition est donc un groupe.

Soit x_1 un autre point base. Comme X est connexe par arcs, il existe un chemin α d'origine x_0 et d'extrémité x_1. L'application $\Phi : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_1)$ définie par $\Phi(\sigma) = \alpha\sigma\alpha^{-1}$ est compatible avec la relation d'homotopie et induit un isomorphisme de groupes $\Phi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$.

2.3. Définition. *On appelle* ***groupe fondamental*** *de l'espace X et on note $\pi_1(X)$ l'un quelconque des groupes $\pi_1(X, *)$ où $*$ est un point base. On dit que X est* ***simplement connexe*** *si $\pi_1(X) = 0$.*

Soient X et Y deux espaces connexes par arcs et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On a une application $f_* : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(Y, y_0)$ (où $y_0 = f(x_0)$) définie par $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$. Elle vérifie

- $(id_X)_* = id_{\Omega(X)}$
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ où $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont des applications continues. Ces propriétés sont en plus compatibles avec la relation d'homotopie des lacets. On a donc un morphisme de groupes $\pi_1(f) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$.

Si f est un homéomorphisme, $\pi_1(f)$ est un isomorphisme. Pour cette raison on dira que $\pi_1(X)$ est un *invariant topologique* de X. Si M est une variété paracompacte, $\pi_1(M)$ est un groupe dénombrable.

3. Revêtemets

Soient X et $\widehat{X}$ deux espaces topologiques séparés, connexes par arcs et localement compacts (un espace topologique est dit *localement compact* si tout point admet un voisinage compact).

3.1. Définition. *On dira qu'une application continue $p : \widehat{X} \longrightarrow X$ est un revêtement si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $p^{-1}(U)$ soit une réunion disjointe d'ouverts $(V_i)_{i\in I}$ de $\widehat{X}$ et, pour tout $i \in I$, la restriction de p à V_i soit un homéomorphisme sur U.*

On dira que p est la *projection* du revêtement et, souvent, c'est l'espace $\widehat{X}$ lui-même qui est dit *revêtement* de X, ce dernier en est la *base*. L'ouvert U est appelé *voisinage* *distingué* de x et $F_x = p^{-1}(x)$ la *fibre* en x du revêtement ; c'est un sous-espace discret de X qui peut être continu, dénombrable ou fini. Toutes les fibres F_x ont même cardinal.

3.2. Exemples

i) Soit $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ l'application définie par $p(\theta) = e^{2i\pi\theta}$. Ici le cecle $\mathbb{S}^1$ est vu comme l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soient $x \in \mathbb{S}^1$ et U un arc de cercle ouvert centré en x de longueur $4\pi\varepsilon$ avec ε assez petit. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0,1[$ tel que $p(\theta) = x$; alors

$$p^{-1}(U) = \coprod_{k\in\mathbb{Z}}]k+\theta-\varepsilon, k+\theta+\varepsilon[$$

et la restriction de $p :]k+\theta-\varepsilon, k+\theta+\varepsilon[\longrightarrow U$ est un homéomorphisme (bien connu). La fibre F_x est constituée par tous les points θ_k de $\mathbb{R}$, transformés de θ par une translation entière.

ii) L'exemple qui précède se généralise au cas où $X = \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ (tore à n dimensions), $\widehat{X} = \mathbb{R}^n$ en posant

$$p(\theta_1, \ldots \theta_n) = (e^{2i\pi\theta_1}, \ldots, e^{2i\pi\theta_1}).$$

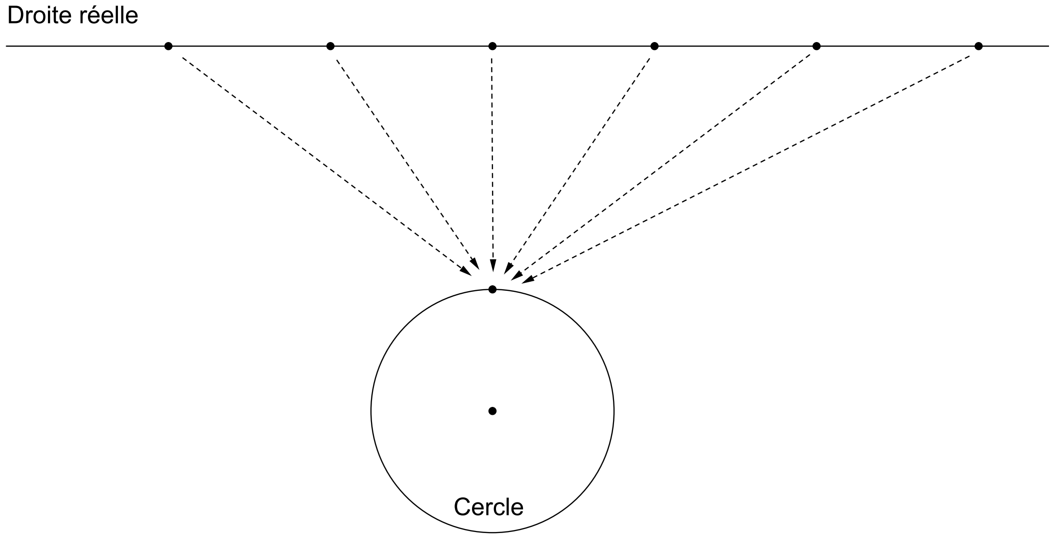
iii) On pose $\widehat{X} = X = \mathbb{S}^1$ et $p(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors p est un revêtement du cercle (à vérifier). La fibre F_x en un point $x \in \mathbb{S}^1$ est constituée de n points uniformément distribués sur le cercle. On dira que p est un revêtement à n *feuillets* de $\mathbb{S}^1$: le cercle $\mathbb{S}^1$, base de p, est "reproduit n fois" ; dans l'exemple i) il est "reproduit une infinité dénombrable de fois".

iv) Soient M et N deux variétés différentiables connexes de même dimension et $p : M \longrightarrow N$ une application différentiable surjective. On rappelle que p est de rang maximum au point $y \in M$ si l'application tangente $dp_y : T_yM \longrightarrow T_xN$ (où $x = p(y)$) est surjective (donc un isomorphisme). Alors d'après le théorème des fonctions implicites : *si p est de rang maximum en tout point $y \in M$, p est un revêtement.*

Le point le plus important pour nous dans ce texte est le théorème suivant dont on peut trouver la démonstration dans n'importe quel ouvrage de Topologie algébrique (ou différentielle).

3.3. Théorème. *Soit M une variété connexe séparée de classe C^r ($r \in \mathbb{N} \cap \{\infty, \omega\}$) et de dimension n. Alors il existe une variété $\widetilde{M}$ connexe et simplement connexe, séparée, de classe C^r et de dimension n et une action libre, propre et totalement discontinue de $\Gamma = \pi_1(M)$ telle que $M = \widetilde{M}/\Gamma$ et la projection canonique $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ soit un revêtement de classe C^r. Si M est analytique complexe, $\widetilde{M}$ est aussi analytique complexe et p est holomorphe. Si $p' : \widetilde{M}' \longrightarrow M$ est un autre tel revêtement, il existe un homéomorphisme $H : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}'$ (de classe C^r ou holomorphe suivant que M est de classe C^r ou analytique complexe) tel que $p = p' \circ H$.*

On dira que $\widetilde{M} \xrightarrow{p} M$ est le *revêtement universel* de M. Les *propriétés géométriques locales* de M et $\widetilde{M}$ sont les mêmes.



Le revêtement universel du cercle

Fig. II.1

4. Objets géométriques invariants

Soit Γ un groupe discret (dénombrable) agissant d'une manière propre et discontinue sur une variété $\widetilde{M}$. On notera M la variété quotient $\widetilde{M}/\Gamma$ et $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ la projection canonique qui est un revêtement de classe C^∞. Le but de ce paragraphe est de décrire les conditions d'invariance que doit vérifier un objet géométrique sur $\widetilde{M}$ pour induire un objet de même nature sur M. Tout est considéré être de classe C^∞.

4.1. Fonctions invariantes

Soient $C^\infty(\widetilde{M})$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur $\widetilde{M}$ et $C^\infty(M)$ celle de M. On dira que $\widetilde{f} \in C^\infty(\widetilde{M})$ est Γ-*invariante* si, pour tout $x \in \widetilde{M}$ et tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\widetilde{f}(\gamma x) = \widetilde{f}(x)$ *i.e.* $\widetilde{f}$ est constante sur toute orbite de l'action de Γ sur la variété $\widetilde{M}$. L'ensemble $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$ des fonctions Γ-invariantes sur $\widetilde{M}$ est une sous-algèbre de $C^\infty(\widetilde{M})$.

Soit $\varphi : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(\widetilde{M})$ l'application définie par $\varphi(f) = f \circ p$. Alors : *φ est à image dans $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$ et est un isomorphisme canonique de $C^\infty(M)$ sur $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$.*

L'exemple le plus folklorique est celui où $\widetilde{M} = \mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ agissant par translations ; la variété $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est alors le tore $\mathbb{T}^n$. Il est bien connu que les fonctions sur $\mathbb{T}^n$ sont exactement les fonctions sur $\mathbb{R}^n$ (avec la même propriété de mesurabilité, continuité, différentiabilité, analyticité ou autre) et qui sont $\mathbb{Z}^n$-*périodiques i.e.* vérifient :

$$f(x_1 + q_1, \ldots, x_n + q_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$.

4.2. Champs de vecteurs invariants

On rappelle que l'ensemble $C^\infty(T\widetilde{M})$ des champs de vecteurs sur $\widetilde{M}$ est un module sur l'algèbre $C^\infty(\widetilde{M})$. Soient $\gamma \in \Gamma$ et $X \in C^\infty(T\widetilde{M})$; on définit le champ $\gamma_*(X)$ sur $\widetilde{M}$ par

$$\gamma_*(X)(\gamma(x)) = (d_x\gamma)(X_x) \tag{II.3}$$

pour tout point $x \in \widetilde{M}$. On dira que X est γ-*invariant* si $\gamma_*(X) = X$ *i.e.* pour tout $x \in \widetilde{M}$ on a $\gamma_*(X)(x) = X_x$. On dira que X est Γ-*invariant* s'il est γ-invariant pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $C^\infty_\Gamma(T\widetilde{M})$ des champs Γ-invariants sur $\widetilde{M}$ est un module sur $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$.

L'action de Γ sur $\widetilde{M}$ définit une action sur le fibré tangent $T\widetilde{M}$ de la façon suivante. Soit $\gamma \in \Gamma$; à tout élément (x, X_x) de $T\widetilde{M}$ on associe l'élément $(\gamma x, (d_x\gamma)(X_x))$. Cette action est propre et discontinue, préserve la section nulle $x \in \widetilde{M} \longrightarrow (x, 0) \in T\widetilde{M}$ et sa restriction à cette section est exactement l'action de Γ sur $\widetilde{M}$. La variété quotient $T\widetilde{M}/\Gamma$ s'identifie au fibré tangent TM de M ; la projection de fibré $\pi : TM \longrightarrow M$ est induite par celle du fibré $T\widetilde{M}$: $\widetilde{\pi} : T\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$. Le $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$-module $C^\infty_\Gamma(T\widetilde{M})$ est ainsi canoniquement isomorphe au $C^\infty(M)$-module $C^\infty(TM)$.

Soient par exemple $\widetilde{M} = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant par translations $x \longmapsto x + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Alors la variété quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ est difféomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$. Tout champ de vecteurs sur $\mathbb{R}$ est de la forme $X = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$; il est invariant par Γ si, et seulement si, $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ *i.e.* f est une fonction périodique de période 1.

Supposons maintenant que $\mathbb{Z}$ agit par l'homothétie $\gamma : x \longmapsto \lambda x$ (générateur de l'action) sur $\mathbb{R}^*_+$ avec $\lambda \in]0, 1[$; la variété quotient est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$. L'action de l'homothétie γ sur le champ $X = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ (où $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*_+)$) est

$$\gamma_*(X)(\gamma x) = d_x\gamma(X_x) = \lambda f(x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Donc X est Γ-invariant si, et seulement si, la fonction f vérifie la relation $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$. Par exemple le champ $X_0 = x\frac{\partial}{\partial x}$ est invariant et tout autre champ invariant s'écrit $h(x)X_0$ avec h invariante *i.e.* vérifiant $h(\lambda x) = h(x)$.

En fait les deux actions qu'on vient de considérer sur les variétés respectives $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*_+$ sont conjugées par le difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*_+$ qui à x associe e^x.

4.3. Formes différentielles invariantes

Soient $\gamma \in \Gamma$ et $\widetilde{\omega}$ une forme différentielle de degré r sur $\widetilde{M}$. On sait que l'image réciproque de $\widetilde{\omega}$ par γ est une forme différentielle $\gamma^*(\widetilde{\omega})$ de degré r sur $\widetilde{M}$ définie par

$$\gamma^*(\widetilde{\omega})(x)(X_1(x), \dots, X_r(x)) = \widetilde{\omega}(\gamma x)(d_x\gamma(X_1(x)), \dots, d_x\gamma(X_r(x)))$$

où $x \in \widetilde{M}$ et $X_1(x), \ldots, X_r(x)$ sont des champs tangents à $\widetilde{M}$ au point x. On dira que $\widetilde{\omega}$ est γ-*invariante*, si $\gamma^*(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}$; on dira que $\widetilde{\omega}$ est Γ-*invariante* si elle est γ-invariante pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $\Omega^r_\Gamma(\widetilde{M})$ des r-formes Γ-invariantes sur $\widetilde{M}$ est un $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$-module.

Rappelons que la projection de revêtement $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ est un difféomorphisme local *i.e.* tout point $x \in \widetilde{M}$ admet un voisinage ouvert U tel que $p : U \longrightarrow p(U)$ soit un difféomorphisme ; en particulier l'application tangente $d_xp : T_x\widetilde{M} \longrightarrow T_{p(x)}M$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit $\widetilde{\omega}$ une r-forme sur $\widetilde{M}$ invariante par l'action de Γ ; nous allons lui associer une r-forme ω sur M. Soient y un point de M et $x \in \widetilde{M}$ tel que $p(x) = y$; tout autre point x' tel que $p(x') = y$ est Γ-équivalent à x *i.e.* il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $x' = \gamma x$. Pour tout vecteur $X_y \in T_yM$ on note $\widetilde{X}_x$ le vecteur $(d_xp)^{-1}(X_y)$ de $T_x\widetilde{M}$ et on pose

$$\omega(y)(X_1(y), \ldots, X_r(y)) = \widetilde{\omega}(x)(\widetilde{X}_1(x), \ldots, \widetilde{X}_r(x)).$$

Il est très facile de vérifier que ceci est indépendant du choix du point x se projetant sur y et que ω est une r-forme bien définie sur M. L'application p_* qui à $\widetilde{\omega} \in \Omega^r(\widetilde{M})$ associe la forme $\omega \in \Omega^r(M)$ ainsi définie est un isomorphisme (de $C^\infty(M)$-modules) de $\Omega^r_\Gamma(\widetilde{M})$ sur $\Omega^r(M)$ dont l'inverse est donné par l'application *image réciproque* $p^* : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^r_\Gamma(\widetilde{M})$.

4.4. Mesures invariantes

On munit M de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathcal{M}$ (celle engendrée par tous les ouverts ou tous les fermés). Une mesure μ sur M est dite Γ-*invariante* si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout borélien $A \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$, on a $\mu(\gamma(A)) = \mu(A)$. Une telle mesure en induit une sur la variété quotient $X = M/\Gamma$. Par exemple, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par toute translation et donc par l'action naturelle de $\mathbb{Z}^n$; elle induit alors une mesure sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. L'assertion suivante est facile à établir.

Soient μ une mesure sur M invariante par Γ et Δ un domaine fondamental de Γ dont le bord $\partial\Delta$ est de μ-mesure nulle. Notons $\overline{\mu}$ la mesure induite sur X. Alors, pour toute fonction $\overline{\mu}$-intégrable $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, la fonction $\widetilde{f} = f \circ p$ (p étant la projection canonique $M \longrightarrow X$) est μ-intégrable sur Δ et on a

$$\int_X f d\overline{\mu} = \int_\Delta \widetilde{f} d\mu. \tag{II.4}$$

4.5. Exemple

Soit A un élément de $\mathrm{SL}(n-1, \mathbb{Z})$ (groupe des matrices carrées d'ordre $n-1$ à coefficients entiers et de déterminant égal à 1). Alors A agit de façon linéaire sur l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ et préserve le sous-groupe $\mathbb{Z}^{n-1}$. Cela permet de construire un produit semi-direct $\Gamma = \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \mathbb{Z}$; il possède un sous-groupe distingué $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \{0\} = \mathbb{Z}^{n-1}$. Le groupe Γ est engendré par n éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, \sigma$ qu'on peut représenter comme des difféomorphismes de $\widetilde{M} = \mathbb{R}^n$

$$\gamma_i : (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \longmapsto (x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_{n-1}, t)$$

pour $i = 1, \ldots, (n-1)$ et

$$\sigma : (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \longmapsto (A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t+1).$$

On définit ainsi une action (analytique) de Γ sur $\mathbb{R}^n$ dont on vérifie facilement qu'elle est propre et discontinue. Le quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ peut être obtenu de la façon suivante : Γ_0 préserve le facteur $\widetilde{M_0} = \mathbb{R}^{n-1}$ dans $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$; le quotient de $\widetilde{M}$ par Γ_0 est donc $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Comme Γ_0 est distingué dans Γ on a $\widetilde{M}/\Gamma = (\widetilde{M}/\Gamma_0)/\Sigma$ où Σ est le groupe quotient Γ/Γ_0 qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$; il est engendré par la classe $\overline{\sigma}$ de σ qui agit sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ comme suit

$$\overline{\sigma} : (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \longmapsto (\overline{A}(x_1, \ldots, x_{n-1}), t+1)$$

où $\overline{A}$ est le difféomorphisme de $\mathbb{T}^{n-1}$ induit par l'application linéaire de $\mathbb{R}^{n-1}$ de matrice A. Cette action de Σ sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ possède un domaine fondamental compact $\Delta = \mathbb{T}^{n-1} \times [0,1]$ et la variété quotient

$$M = (\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R})/\Sigma$$

est obtenue à partir de Δ en identifiant les points $(x, 0)$ et $(\overline{A}(x), 1)$; c'est donc une variété compacte (sans bord). Tout point de M possède un voisinage ouvert de la forme $\mathbb{T}^{n-1} \times]a, b[$ où a et b sont des réels tels que $a < b$. La deuxième projection $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ commute à l'action de Σ sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et induit une submersion $\tau : M \longrightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\Sigma$; l'image réciproque par τ d'un point de $\mathbb{S}^1$ est un tore $\mathbb{T}^{n-1}$. On dira que M est un *fibré* en tores $\mathbb{T}^{n-1}$ au-dessus du cercle $\mathbb{S}^1$ et on écrit

$$\mathbb{T}^{n-1} \hookrightarrow M \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^1.$$

i) Toute fonction sur M est une fonction sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ vérifiant la relation d'invariance $f(\overline{A}(x), t+1) = f(x, t)$ ou encore f est une fonction sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ en les variables $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ vérifiant les relations

$$f(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_{n-1}, t) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1$$

et

$$f(A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t+1) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t).$$

On peut expliciter un peu plus ces conditions d'invariance en usant d'un développement de Fourier. En effet, comme f est périodique en les variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$, elle s'écrit sous la forme

$$f(x_1, \cdots, x_{n-1}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}} f_{\mathbf{k}}(t) e^{2i\pi \langle x, \mathbf{k} \rangle}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et les $f_{\mathbf{k}}(t)$ sont les coefficients de Fourier qui dépendent du multi-indice $\mathbf{k}$ mais aussi du facteur $t \in \mathbb{R}$; le fait que la fonction f soit de classe C^∞ impose à ces coefficients et à leurs dérivées (comme fonctions de t) d'avoir une *décroissance rapide*, c'est-à-dire, pour tous $r, s \in \mathbb{N}$ et tout $R > 0$, la série suivante est convergente :

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{n-1}} |\mathbf{k}|^{2r} ||f^{(s)}||^2$$

où $|\mathbf{k}|^2 = \langle \mathbf{k}, \mathbf{k}\rangle$ et $||f^{(s)}|| = \sup_{|t|\leq R} |f^{(s)}(t)|$. La fonction $f(A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t+1)$ a pour développement de Fourier

$$f(A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t+1) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{n-1}} f_{\mathbf{k}}(t+1) e^{2i\pi\langle Ax, \mathbf{k}\rangle}$$

ou encore, en utilisant le fait que $\langle Ax, \mathbf{k}\rangle = \langle x, A'\mathbf{k}\rangle$ avec A' transposée de A, on obtient

$$f(A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t+1) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{n-1}} f_{\mathbf{k}}(t+1) e^{2i\pi\langle x, A'\mathbf{k}\rangle}.$$

Posons $\mathbf{k}' = A'\mathbf{k}$; par unicité du développement de Fourier, la condition d'invariance de la fonction f s'écrit alors

$$f_{\mathbf{k}}(t+1) = f_{\mathbf{k}'}(t) \ \text{ pour tout } \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

ii) Pour décrire les champs de vecteurs sur M, nous allons exhiber une base de champs invariants par Γ sur $\widetilde{M}$ adaptés à notre situation. Nous supposerons pour simplifier que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ toutes positives. Soient $u_1, \ldots, u_{n-1}$ des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ et $\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_{n-1}$ les champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ (tangents à la fibration au-dessus de $\mathbb{R}$ définie par la deuxième projection $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) de directions respectives $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Il est alors facile de voir que les champs

$$X_i = \lambda_i^t \widetilde{u}_i \ \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1 \text{ et } X_n = \tfrac{\partial}{\partial t}$$

sont invariants par Γ ; ils définissent donc des champs sur M. En plus, ils forment une base de l'espace tangent T_xM en chaque point $x \in M$. Par suite tout champ de vecteurs X sur M s'écrit

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i$$

où $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions sur M (ou des fonctions Γ-invariantes sur $\widetilde{M}$). Ainsi le $C^\infty(M)$-module $C^\infty(TM)$ est libre et a pour base $(X_1, \ldots, X_n)$.

iii) Pour déterminer les formes différentielles sur M on prend la base duale $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ de $(X_1, \ldots, X_n)$. La forme θ_n est tout simplement dt. Ainsi $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ est une base du $C^\infty(M)$-module libre $\Omega^1(M)$; toute r-forme ω sur M s'écrit donc

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_r} \theta_{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta_{i_r},$$

la sommation porte sur les multi-indices $(i_1, \ldots, i_r)$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ et les $\omega_{i_1 \ldots i_r}$ sont des fonctions C^∞ sur M.

Pour finir on peut voir facilement que la n-forme $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$ est partout non nulle et est donc une forme volume sur la variété M ; en fait elle n'est rien d'autre que la forme induite par $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge dt$ qui est la forme volume usuelle de $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE III

Homotopie

C'est une notion plus faible que l'homéomorphie, mais elle est aussi importante. C'est l'objet de ce chapitre. Nous commencerons par définir la notion d'applications homotopes ainsi que ses variantes : rétraction, rétraction par déformation, type d'homotopie ou équivalence homotopique *etc.* Ensuite, nous introduirons rapidement le $\pi_0(X)$ d'un espace X (qui "mesure" sa connexité par arcs) et construirons les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ (une ébauche de $\pi_1(X)$ se trouve déjà dans le chapitre III) ; nous montrerons leur caractère fonctoriel, le fait qu'ils sont des invariants du type d'homotopie et la commutativité des $\pi_n(X)$ pour $n \geq 2$. Nous donnerons des exemples de calcul et quelques applications.

Tous les espaces topologiques que nous considérerons dans ce chapitre seront séparés et souvent (sauf mention du contraire) connexes par arcs.

1. Généralités

Cette section est dédiée aux définitions générales : homotopie, homotopie relative, homotopie différentiable *etc.* Nous en donnerons aussi différents exemples.

1.1. Définition. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$. On dira que f_0 et f_1 sont* ***homotopes****, s'il existe une application continue $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que $F(x,0) = f_0(x)$ et $F(x,1) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$. Soit A une partie de X ; on dira que f_0 et f_1 sont* ***homotopes relativement*** *à A s'il existe une homotopie F entre f_0 et f_1 telle que, pour $s \in [0,1]$ et tout $a \in A$, on ait $F(x,s) = f_0(a) = f_1(a)$.*

L'homotopie est aussi une connexité par arcs. En effet, notons $C(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y qu'on munit de la *topologie compacte ouverte*, c'est-à-dire la topologie engendrée par la famille des parties de la forme

$$\mathcal{O}(K,U) = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subset U\}$$

où K décrit les compacts de X et U les ouverts de Y. Il est alors facile de vérifier que les applications $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont homotopes si, et seulement si, elles sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace topologique $C(X,Y)$. On vérifie facilement les assertions qui suivent.

– Toute application f est homotope à elle-même : prendre $F(x,s) = f(x)$ comme homotopie.

– f_0 homotope à f_1 via $F(x,s)$ implique que f_1 est homotope à f_0 via l'application $G(x,s) = F(x, 1-s)$.

– Si f_0 est homotope à f_1 via F_1 et f_1 homotope à f_2 via F_2 alors f_0 est homotope à f_2 via l'application

$$G(x,s) = \begin{cases} F_1(x,2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ F_2(x,2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

L'homotopie est donc une relation d'équivalence dans l'espace topologique $C(X,Y)$. Le quotient est noté $[X,Y]$. On a en plus la propriété suivante :

– Soient $X \xrightarrow{f_0} Y \xrightarrow{g_0} Z$ et $X \xrightarrow{f_1} Y \xrightarrow{g_1} Z$ deux suites d'applications continues telles f_0 soit homotope à f_1 et g_0 homotope à g_1. Alors $g_0 \circ f_0$ est homotope à $g_1 \circ f_1$. En effet soient F une homotopie de f_0 à f_1 et G une homotopie de g_0 à g_1 ; alors l'application $H : (x,s) \in X \times I \longmapsto G(F(x,s),s) \in Z$ est une homotopie de $g_0 \circ f_0$ à $g_1 \circ f_0$.

1.2. Définition. *On dira que X et Y ont même* ***type d'homotopie*** *s'il existe des applications continues $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes respectivement à 1_X et 1_Y.*

Bien sûr, si X et Y sont homéomorphes, ils ont même type d'homotopie : si l'application $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme, prendre $g = f^{-1}$. La réciproque est fausse (on en verra des exemples).

Soient X un espace, A un sous-espace et $j : A \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle ; une *rétraction* de X sur A est une application continue $r : X \longrightarrow A$ dont la restriction à A est 1_A ; si en plus $j \circ r$ est homotope à 1_X, on dira que r est une *rétraction par déformation* de X sur A (ou que X se rétracte par déformation sur A). Dans ce cas, X et A ont même type d'homotopie : l'étude de X du point de vue de l'homotopie est ainsi ramenée à celle de A qui en général plus petit et souvent plus simple. On dira que X est *contractile* s'il se rétracte par déformation sur l'un de ses points : c'est un espace qui n'est homotopiquement "rien" !

1.3. Exemples

(1) - Soient X un espace et Y un espace normé ; deux applications continues $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont toujours homotopes : $F(x,s) = (1-s)f_0(x) + sf_1(x)$ est une homotopie de f_0 à f_1.

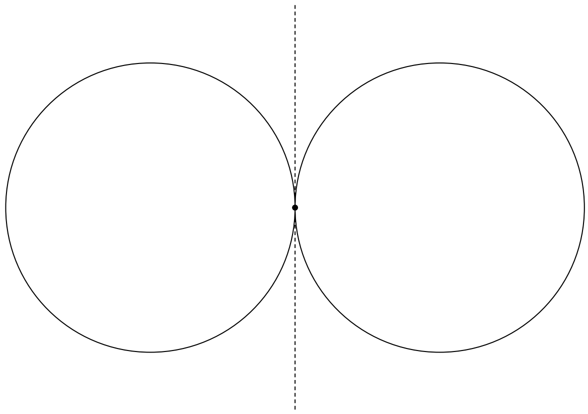
(2) - Si Y est contractile, f_0 et f_1 dans $C(X,Y)$ sont toujours homotopes (laissé en exercice au lecteur).

(3) - Une partie A d'un espace normé Y est dite *étoilée* par rapport au point $a \in A$ si, pour tout $b \in A$, le segment d'extrémités a et b est contenu dans A. Une partie convexe est étoilée par rapport à n'importe quel point $a \in A$. Toute partie étoilée est contractile ; toute partie homéomorphe à une partie étoilée est contractile.

(4) - L'espace $\mathbb{R}^n$ est contractile. Par contre $\mathbb{R}^{n+1}$ (pour $n \geq 1$) ne l'est pas mais il se rétracte par déformation sur sa sphère unité $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ via l'application $r(x) = \frac{x}{||x||}$, l'homotopie entre r et l'identité de $\mathbb{R}^{n+1}$ est donnée par l'application $H(x,s) = (1-s)x + sr(x)$.

(5) - $Z = \mathbb{C} - \{z_1, \cdots, z_k\}$ se rétracte par déformation sur un *bouquet* de k cercles. Le lecteur pourrait essayer d'écrire explicitement la rétraction dans le cas $Z = \mathbb{C} - \{-1, +1\}$. Il peut prendre le bouquet Γ formé des deux cercles de rayon 1 et de centres respectifs -1 et 1 et l'application continue suivante $r : Z \longrightarrow \Gamma$ donnée explicitement par

$$r(z) = \begin{cases} \frac{z+1}{|z+1|} - 1 & \text{si } \mathcal{R}(z) \leq 0 \text{ et } |z+1| \leq 1 \\ -\frac{z(z+\bar{z})}{|z|^2} & \text{si } \mathcal{R}(z) \leq 0 \text{ et } |z+1| \geq 1 \\ \frac{z-1}{|z-1|} + 1 & \text{si } \mathcal{R}(z) \geq 0 \text{ et } |z-1| \leq 1 \\ \frac{z(z+\bar{z})}{|z|^2} & \text{si } \mathcal{R}(z) \geq 0 \text{ et } |z-1| \geq 1 \end{cases}$$



Bouquet de deux cercles

Fig. III.1

On a vu que l'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble $C(X, Y)$ des applications continues de X dans Y (qui est un espace topologique quand on le munit de la topologie compacte-ouverte). L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $[X, Y]$; un élément de cet ensemble est une *classe d'homotopie* d'applications continues de X dans Y.

Lorsque les espaces X et Y possèdent des structures supplémentaires, par exemple une structure différentiable, il semble naturel de demander aux applications (y compris les homotopies) d'avoir une certaine régularité.

1.4. Définition. *Deux applications différentiables $M \overset{f_0, f_1}{\longrightarrow} N$ sont dites* ***différentiablement homotopes****, s'il existe une application différentiable $F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ telle que*

$$F(x, s) = \begin{cases} f_0(x) & \text{pour } s \leq 0 \\ f_1(x) & \text{pour } s \geq 1. \end{cases}$$

Deux applications différentiables qui sont différentiablement homotopes sont a fortiori homotopes au sens "ordinaire". L'homotopie différentiable est une relation d'équivalence ; les propriétés de réflexivité et de symétrie sont immédiates ; par contre la transitivité ne l'est pas : il faut faire attention au fait que, contrairement aux applications continues, les applications différentiables ne se recollent pas toujours sur des fermés. Supposons que F_1 et F_2 soient des homotopies différentiables respectivement de f_0 à f_1 et de f_1 à f_2 ; alors

$$F(x,s) = \begin{cases} F_1(x,3s) & \text{pour } s < \frac{2}{3} \\ F_2(x,3s-2) & \text{pour } s > \frac{1}{3} \end{cases}$$

est une homotopie différentiable de f_0 à f_2 : la "transition différentiable" de f_0 à f_2 se fait sur l'ouvert $M\times]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$.

Sur les variétés C^∞, il est bien entendu très utile d'utiliser la structure différentiable même si les problèmes auxquels on s'intéresse sont purement topologiques (*i.e.* n'utilisent que la notion de continuité). Le théorème qui suit illustre un peu cette situation.

1.5. Théorème. *Soient M et N deux variétés différentiables et $f : M \longrightarrow N$ une application continue. Alors f est homotope à une application différentiable $g : M \longrightarrow N$.*

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [Go] par exemple. Les deux grandes étapes sont :

i) toute application continue $M \longrightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme sur tout compact d'une suite d'applications différentiables $g_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$;

ii) on plonge différentiablement N dans un $\mathbb{R}^\ell$ et on approche, en utilisant le point i), les coordonnées du plongement $N \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$.

2. Les groupes d'homotopie

Nous commencerons d'abord par définir le π_0 même si, en général, il n'est pas un groupe. C'est un invariant qui décrit la connexité par arcs.

Soit X un espace *localement connexe par arcs*, c'est-à-dire pour tout point $x \in X$ et tout voisinage V_x, il existe un voisinage ouvert de x connexe par arcs et contenu dans V_x. Sur X on définit la relation d'équivalence : x est équivalent à y si, et seulement si, x et y appartiennent à la même composante connexe par arcs. La classe de x est la composante connexe par arcs contenant x. Le quotient de X par cette relation d'équivalence est un ensemble noté $\pi_0(X)$. Toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ induit une application $f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$; si f est un homéomorphisme, f_* est une bijection. Ceci permet par exemple de résoudre le problème suivant : $\mathbb{R}$ *est-il homéomorphe à* $\mathbb{R}^2$? Supposons qu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$; alors sa restriction (qu'on notera encore f) à $\mathbb{R}^*$ est un homéomorphisme sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, donc $f_* : \pi_0(\mathbb{R}^*) \longrightarrow \pi_0(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ est une bijection ; ceci est impossible puisque $\pi_0(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ a un seul élément et $\pi_0(\mathbb{R}^*)$ en a deux. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont donc pas homéomorphes.

Comme on l'a déjà dit, $\pi_0(X)$ n'est pas un groupe. Cependant si X est un groupe de Lie G (*i.e.* G est un groupe qui possède en plus une structure différentiable telle que les appliactions naturelles $(g,g') \in G \times G \longmapsto gg' \in G$ et $g \in G \longmapsto g^{-1} \in G$ soient différentiables), la composante connexe G_0 qui contient l'identité est connexe par arcs et est un sous-groupe distingué de G ; un raisonnement immédiat permet de voir que $\pi_0(G)$ s'identifie à G/G_0 et est donc un groupe.

Désormais X sera un espace séparé connexe par arcs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous allons introduire le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie $\pi_n(X)$; le premier étant le groupe fondamental dont nous avons déjà esquissé la construction.

2.1. Remarque préliminaire

On aura à utiliser dans toute la suite les espaces suivants : I^n, produit cartésien n fois de l'intervalle $I = [0,1]$, la boule unité fermée $\mathbb{D}^n$ de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ et la sphère unité de dimension n qu'on note habituellement $\mathbb{S}^n$. On notera (X, x_0) l'espace X dans lequel on a choisi un point x_0 appelé *point base* ; on dira que (X, x_0) est un *espace pointé*. Une application continue entre deux espaces pointés (X, x_0) et (Y, y_0) est dite *pointée*, si elle vérifie $f(x_0) = y_0$.

L'espace I^n est homéomorphe à $\mathbb{D}^n$ via l'application Φ qui à $x \in I^n$ associe $\Phi(x) = \left(\frac{X_1}{\|x\|} \cdots \frac{X_n}{\|X\|}\right)$ où $X = (X_1, \cdots, X_n) = \left(\frac{2x_1-1}{2}, \cdots, \frac{2x_n-1}{2}\right)$; cette application envoie le bord ∂I^n de I^n sur le bord $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{D}^n$. D'autre part, si on considère sur $\mathbb{D}^n$ la relation d'équivalence dont les classes sont

$$c\ell(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| < 1 \\ \partial\mathbb{D}^n & \text{si } \|x\| = 1, \end{cases}$$

l'espcace quotient X est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^n$. Par exemple, pour $n = 2$ il est induit par l'application $\Psi : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ donnée par

$$\Psi(x) = \begin{cases} \text{pôle nord} & \text{si } x = 0 \\ \begin{pmatrix} \cos\theta \sin(\pi r) \\ \cos\theta \sin(\pi r) \\ \cos(\pi r) \end{pmatrix} & \text{si } 0 < \|x\| < 1 \\ \text{pôle sud} & \text{si } \|x\| = 1 \end{cases}$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires de x. Ainsi lorsqu'on s'intéressera à une application continue $I^n \longrightarrow X$ qui envoie tout le bord ∂I^n sur un point base x_0, on pourra la considérer comme une application continue $\mathbb{D}^n \longrightarrow X$ qui envoie le bord de $\mathbb{D}^n$ vers x_0 ou comme une application continue $\mathbb{S}^n \longrightarrow X$ qui envoie un point privilgié e sur x_0 ; suivant la situation on prendra l'un ou l'autre de ces points de vue.

Soit x_0 un point base dans X. Une applications continue α de I^n dans X qui envoie le bord ∂I^n sur le point x_0 sera schématisée par

$$\alpha : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0).$$

Soient α et β deux telles applications. On définit $\alpha\beta : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ par

$$\alpha\beta(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

On a donc une loi de composition interne sur l'ensemble $\Omega(X, x_0))$ des applications continues de I^n qui envoient ∂I^n sur le point base x_0. Pour $\alpha \in \Omega_n(X, x_0)$ on définit $\alpha^{-1} \in \Omega(X, x_0)$ par

$$\alpha^{-1}(t_1, \cdots, t_n) = \alpha(1 - t_1, t_2, \cdots, t_n).$$

On notera α_{x_0} l'application constante $(I^n, \partial I^n) \longrightarrow X$ qui envoie tout sur le point base x_0. La loi de composition interne qu'on vient de définir permet de munir le quotient $\pi_n(X, x_0)$ de $\Omega(X, x_0)$ par la relation d'homotopie d'une structure de groupe : c'est le $n^{\text{ème}}$ *groupe d'homotopie* de X relativement au point base x_0, $\pi_1(X, x_0)$ étant le groupe fondamental qu'on a déjà rencontré.

2.2. Dépendance par rapport au point base

A priori $\pi_n(X, x_0)$ dépend du choix du point base x_0. Nous allons voir que, si on change ce point, le groupe d'homotopie change mais reste algébriquement le même et donc sera défini à ismorphisme près.

Soient x_1 un autre point base et γ un chemin joignant x_0 à x_1 (possible car X est connexe par arcs). On définit une application $\alpha \in \Omega_n(X, x_0) \longrightarrow \gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma \in \Omega_n(X, x_1)$ par

$$\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \gamma(t - 3t_1) & \text{si } 0 \le t_1 \le \frac{1}{3} \\ \alpha(3t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{3} \le t_1 \le \frac{2}{3} \\ \gamma(3t_1 - 2, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{2}{3} \le t_1 \le 1. \end{cases}$$

Elle induit un isomorphisme $\Phi_\gamma : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1)$; si $[\alpha] \in \pi_(X, x_0)$ on écrit $\Phi_\gamma([\alpha]) = \gamma^{-1}[\alpha]\gamma$. Si γ' est un autre chemin reliant x_0 à x_1, les morphismes Φ_γ et $\Phi_{\gamma'}$ sont conjugués dans $\pi_n(X, x_1)$. Si alors $\pi_n(X, x_1)$ est abélien, on a $\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma'}$. Le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie de X sera par définition l'un des groupes $\pi_n(X, x_0)$ où x_0 est un point base quelconque ; il sera noté $\pi_n(X)$.

Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces pointés et $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ une application pointée. Alors l'application $\alpha \in \Omega_n(X, x_0) \longrightarrow f \circ \alpha \in \Omega_n(Y, y_0)$ est compatible avec l'équivalence homotopique (découle de la compatibilité de l'homotopie avec la composition des appliactions) et induit un morphisme de groupes

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0).$$

On pourra aussi oublier les points base et écrire simplement $f_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$. Ce morphisme vérifie les propriétés suivantes :

– si $f = 1_X$ alors $f_* = 1_{\pi_n(X)}$;

– $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ pour toute suite d'applications $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$;

– si $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors f_* est un isomorphisme et son inverse $(f_*)^{-1}$ est égal à $(f^{-1})^*$.

Deux espaces homéomorphes ont donc des groupes d'homotopie isomorphes *i.e.* les groupes d'homotopie sont des invariants topologiques ; nous allons voir qu'ils sont plus que cela.

2.3. Proposition. *Soient X et Y deux espaces et $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ deux applications homotopes via une homotopie F. Soient a un point de X et γ le chemin dans Y joignant $y_0 = f(a)$ à $y_1 = f_1(a)$ défini par $\gamma(t) = F(a,t)$. Alors, pour tout $[\alpha] \in \pi_n(X,a)$ on $(f_1)_*([\alpha]) = \Phi_\gamma((f_0)_*([\alpha]))$ où $\Phi_\gamma([\sigma]) = \gamma^{-1} \cdot [\sigma] \cdot \gamma$ pour tout $[\sigma] \in \pi_n(Y, y_1)$ (cf. 2.2.).*
Démonstarion Soit $\alpha \in \Omega_n(X,a)$; il s'agit de montrer que $\gamma^{-1} \cdot (\alpha \circ f_0) \cdot \gamma \in \Omega_n(Y, y_1)$ est homotope à $f_1 \circ \alpha \in \Omega_n(Y, y_1)$. Soit $H : I^n \times I \longrightarrow Y$ l'application définie par

$$H(t_1, \cdots, t_n, s) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t_1) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1-s}{2} \\ F\left(\alpha\left(\frac{4t_1+2s-2}{3s+1}\right), t_2, \cdots, t_n, s\right) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t_1 \leq \frac{s+3}{4} \\ \gamma(4t_1 - 3) & \text{si } \frac{s+3}{4} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

On voit facilement que H est l'homotopie cherchée : cela découle du fait qu'elle est continue et qu'elle vérifie les égalités suivantes :

$$H(t_1, \cdots, t_n, 0) = (\gamma^{-1} \cdot (f_0 \circ \alpha) \cdot \gamma)(t_1, \cdots, t_n)$$
$$H(t_1, \cdots, t_n, s) = (f_1 \circ \alpha)(t_1, \cdots, t_n)$$
$$H(0, t_2, \cdots, t_n, s) = H(1, t_2, \cdots, t_n, s) = y_1$$

De cette proposition on déduit facilement le théorème qui suit (le lecteur est invité à écrire la démonstration).

2.4. Théorème. *Soient X et Y deux espaces et $f : X \longrightarrow Y$ une équivalence d'homotopie. Soit x_0 et posons $y_0 = f(_0)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le morphisme $\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y y_0)$ est un isomorphisme.*

Ce théorème dit que les groupes d'homotopie d'un espace connexe ne dépendent que de son type d'homotopie : ce sont des *invariants homotopiques.*

2.5. Proposition. *Soient X et Y deux espaces. Alors le groupe $\pi_n(X \times Y)$ est le produit direct $\pi_n(X) \times \pi_n(Y)$.*
Démonstration Soient x_0 et y_0 des points bases respectivement de X et Y et choisissons (x_0, y_0) comme point bases dans $X \times Y$. Alors la première et la deuxième projections $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ et $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ sont des applications pointées. On a donc une application

$$p_* = ((p_1)_*, (p_2)_*) : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y y_0).$$

Elle est injective ; en effet, si $[\eta]) \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ est tel que $p_*([\eta]) = 0$, il existe une homotopie G de $\eta \circ p_1$ à α_{x_0} (application onstante $I^n \longrightarrow x_0 \in X$) et une homotopie H de $\eta \circ p_2$ à α_{y_0} (application onstante $I^n \longrightarrow y_0 \in Y$) ; alors $K = (p_1 \circ G, p_2 \circ H)$ est une homotopie de η à homotopie G de $\eta \circ p_1$ à $\alpha_{(x_0,y_0)}$ (application onstante $I^n \longrightarrow (x_0, y_0) \in X \times Y$). La surjectivité est évidente. $\square$

Nous verrons sur des exemples que la structure du groupe fondamental peut-être très compliquée ; à l'inverse les $\pi_n(X)$ pour $n \geq 2$ sont algébriquement "plus simples" comme l'illustre la proposition qui suit.

2.6. Proposition. *L'espace X sera toujours connexe par arcs. Pour tout $n \geq 2$ le groupe d'homotopie $\pi_n(X)$ est abélien.*
Démonstration Soient $\alpha, \beta \in \Omega_n(X, x_0)$. On doit montrer que $\alpha\beta$ est homotope à $\beta\alpha$. Nous l'illustrerons par les dessins qui suivent.

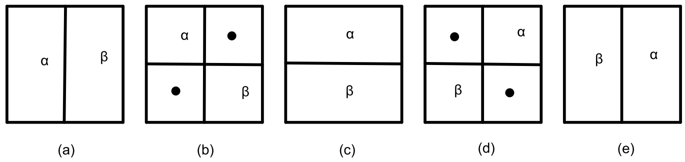


Fig. III.2

Toutes ces figures ne montrent que la face (t_1, t_2) du cube I^n ; les autres coordonnées $t_3, \cdots, t_n$ "n'interviennent pas" dans le raisonnement.

(a) donne le composé $\Psi_1 = \alpha\beta$ *i.e.*

$$\Psi_1(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

(b) donne l'application $\Psi_2 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ définie par

$$\Psi_2(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, 2t_2 - 1, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ \beta(2t_1 - 1, 2t_2, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(c) donne $\Psi_3 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ définie par

$$\Psi_3(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \beta(t_1, 2t_2, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 0 \end{cases}$$

(d) donne l'application $\Psi_4 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ définie par

$$\Psi_2(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \beta(2t_1, 2t_2, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t_1 - 1, 2t_2 - 1, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ x_0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(e) donne l'application $\Psi_5 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ qui est le composé $\beta\alpha$ *i.e.*

$$\Psi_5(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \beta(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

On va montrer que :

$$\Psi_1 \text{ homotope } \Psi_2 \text{ homotope } \Psi_3 \text{ homotope } \Psi_4 \text{ homotope } \Psi_5.$$

Nous ferons seulement le cas Ψ_1 homotope Ψ_2 (le lecteur s'occupera du reste). Soit $H : I^n \times I \longrightarrow X$ l'application définie par

$$H(t_1, \cdots t_n, s) = \begin{cases} \alpha\left(2t_1, \frac{2t_2 - s}{2-s}, t_3, \cdots, t_n\right) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{s}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ \beta\left(2t_1 - 1, \frac{2t_2}{2-s}, t_3, \cdots, t_n\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq t_2 \leq \frac{2-s}{2} \\ x_0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que H est une homotopie entre Ψ_1 et Ψ_2. $\square$

3. Exemples de calculs

De façon générale le calcul des groupes d'homotopie est un problème difficile. Beaucoup de problèmes restent ouverts à ce sujet. Nous allons donner quelques exemples dans des situations très simples.

3.1. Revêtement

Soit $p : \widehat{X} \longrightarrow X$ (X et $\widehat{X}$ étant des espaces connexes par arcs). On choisit un point base $\hat{x}_0 \in \widehat{X}$; on pose $x_0 = p(\hat{x}_0)$ et $F = p^{-1}(x_0)$; F est un espace discret qui est la fibre du revêtement au-dessus du point x_0. On a donc des applications continues $F \hookrightarrow \widehat{X} \xrightarrow{p} X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors une suite de morphismes de groupes

$$\pi_n(F, \hat{x}_0) \longrightarrow \pi_n(\widehat{X}, \hat{x}_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, x_0).$$

On peut montrer que cette suite est exacte (*cf.* [DNF] tome II). Comme F est discret on a $\pi_n(F, \hat{x}_0) = 0$ et donc le morphisme $p^* : \pi_n(\widehat{X}, \hat{x}_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ est injectif. En fait, pour tout $n \geq 2$, $p^* : \pi_n(\widehat{X}, \hat{x}_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ est un isomorphisme. En particulier, si X admet un revêtement contractile (c'est le cas du cercle $\mathbb{S}^1$, des tores $\mathbb{T}^n$, des surfaces de genre $g \geq 1$, des variétés $\mathbb{T}^n_A$ introduites au chapitre III et d'autres), ses groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ sont triviaux pour $n \geq 2$.

3.2. Certains $\pi_n(\mathbb{S}^m)$

On note toujours $\mathbb{S}^m$ la sphère de dimension $m \geq 2$. Nous allons montrer que, pour tout $n \in \{1, \cdots, m-1\}$, le groupe $\pi_n(\mathbb{S}^m)$ est trivial. Pour cela nous aurons besoin de rappeler certains résultats sur les applications différentiables.

Soient N et M deux variétés de dimensions respectives n et m et $N \xrightarrow{f} M$ une application différebntiable. Un point $x \in N$ est dit *point critique* si la différentielle $d_x f : T_x N \longrightarrow T_{fx)} M$ n'est pas surjective. Un point $y \in M$ est dit *valeur critique* de f s'il est l'image par f d'un point critique. Une valeur non critique est dite *régulière* ; si $y \notin f(N)$ alors, par définition même, y est une valeur réglulière. Remarquons que, si $n < m$, l'ensemble des valeurs critiques de f se confond avec $f(M)$. On a alors le

Théorème de Sard. *L'ensemble des valeurs critiques de l'application f est de mesure nulle dans N.*

Ce théorème est essentiel dans le calcul des groupes $\pi_n(\mathbb{S}^m)$ pour $n < m$. En effet, soit $\alpha : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^m$ une application continue représentant un élément de $\pi_n(\mathbb{S}^m)$. On sait (*cf.* théorème 1.5) que α est homotope à une application différentiable ; on peut donc supposer que α elle-même est différentiable. D'après le théorème de Sard et puisque $n < m$, $\alpha(\mathbb{S}^n)$ est de mesure nulle, donc α ne peut pas être surjective. Il existe donc au moins un point $x_0 \in \mathbb{S}^m$ qui n'est pas dans l'image ; α prend donc ses valeurs dans $\mathbb{S}^m - \{x_0\}$; comme celui-ci est contractile, α est homotope à une application constante. Par suite $\pi_n(\mathbb{S}^m)$ est le groupe trivial pour $n \in \{1, \cdots, m-1\}$. $\square$

Le groupe $\pi_m(\mathbb{S}^m)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. La démonstration utilise la *théorie du degré* que nous n'avons pas développée ici ; le lecteur intéressé peut consulter [BT]. Pour $n > m$, certains des groupes sont connus mais ont été calculés de façon assez dispersée à la manière dont on résout les différents types d'équations différentielles par exemple !

4. Retour au groupe fondamental

Même s'il est le plus compliqué algébriquement parmi les groupes d'homotopie, il est quand-même celui pour lequel il existe une méthode de calcul par découpage : le *théorème de Van Kampen*. C'est ce que nous allons voir. Mais avant, nous allons calculer le π_1 du "Roi des espaces" c'est-à-dire le cercle. Pour un espace X, ce sont en effet ses cercles "immergés" qu'on ne peut homotoper à un point qui fournissent les générateurs du π_1. Ces générateurs "meurent" quelquefois au bout d'un nombre fini de tours (ce sont les éléments de torsion).

Rappelons que si $\widetilde{M}$ est une variété et Γ un groupe discret qui agit sur $\widetilde{M}$ de façon libre et propre à l'aide d'une application $\Phi : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$, le quotient $\widetilde{M}/\Gamma = M$ est une variété et la projection $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ est un revêtement. On peut montrer que (et nous l'avons déjà signalé au chapitre III, si $\widetilde{M}$ est simplement connexe, $\pi_1(M)$ est isomorphe à Γ. Nous alllons le faire dans le faire dans le cas particulier $\widetilde{M} = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant par translations entières sur $\mathbb{R}$; dans ce cas le quotient M est le cercle $\mathbb{S}^1$ et la projection $p : t \in \mathbb{R} \longmapsto x \in \mathbb{S}^1$ est $p(t) = x = e^{2i\pi t}$. On choisira $t_0 = 0$ comme point base de $\mathbb{R}$ et $x_0 = 1 = p(0)$ comme point base sur le cercle $\mathbb{S}^1$. On peut remarquer d'abord que, sur $\mathbb{S}^1$, il existe une famille de lacets basés en 1 ayant une allure plus simple en l'occurrence $\sigma_n : t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi nt} \in \mathbb{S}^1$ où $n \in \mathbb{Z}$. Ceuc là vont en fait donner tous les éléments de $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

4.1. Proposition. *i) Soit* $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *un lacet de base* 1. *Il existe un chemin unique* $\widetilde{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *ayant* 0 *pour origine et se projetant par* p *sur* σ *i.e.* $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$.

ii) Soit $H : I \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *une application continue telle que* $H(0,0) = 1$. *Alors il existe une unique application continue* $\widetilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $\widetilde{H}(0,0) = 0$ *et* $p \circ \widetilde{H} = H$.

Démonstration Comme p est un difféomorphisme local la restriction de p à tout intervalle du type $]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$ est un difféomorphisme sur $\mathbb{S}^1 - \{p(a)\}$; il en résulte que si $\widetilde{\sigma}_1$ et $\widetilde{\sigma}_2$ sont deux chemins répondant à la question, ils seront forcément égaux. Prenons $a = 0$ et notons $\tau : \mathbb{S}^1 - \{-1\} \longrightarrow] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ l'homéomorphisme inverse de p. Notons $\| \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{C}$ et regardons $\mathbb{S}^1$ comme l'ensemble des nombres complexes de module 1 ; alors σ est une application continue du compact I dans $\mathbb{C}$, elle est donc uniformément continue ; par suite il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|t - t'| \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow \|\sigma(t) - \sigma(t')\| \leq 1.$$

Cela signifie que, pour $|t - t'| \leq \frac{1}{n}$, le nombre complexe $\sigma(t)\overline{\sigma(t')}$ (produit de $\sigma(t)$ par le conjugué de $\sigma(t')$) ne peut jamais être égal à -1. On découpe $[0, 1]$ en petits intervalles $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ où $k = 0, 1, \cdots, n-1$; on pose, pour $t \in I_k$

$$\widetilde{\sigma}(t) = \tau(\sigma(t)\overline{\sigma(k/n)} + \sum_{j=1}^{k} \tau\left(\sigma(j/n)\overline{\sigma((j-1))}\right).$$

Ceci nous donne une application continue $I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\widetilde{\sigma}(0) = 0$ et son image dans $\mathbb{R}$ se projette sur σ.

Le point ii) se démontre exactement de la même manière. □

Le chemin $\widetilde{\sigma}$ (resp. l'application $\widetilde{H}$) est appelé *relèvement* de σ (resp. de H). L'extrémité $\widetilde{\sigma}(1)$ de $\widetilde{\sigma}$ est un entier appelé *degré* du lact σ. Une de ses propriétés fondamentales est décrite dans la proposition qui suit.

4.2. Proposition. *Deux lacets* σ *et* σ' *sont homotopes si, et seulement si, ils ont même degré.*

Démonstration Supposons σ et σ' homotopes et notons H une homotopie de σ à σ' ; alors, d'après la proposition 4.1, H se relève en une application continue $\widetilde{H} : I \times \mathbb{R}$. Comme, pour tout $s \in I$, $\widetilde{H}(1, s)$ est l'extrémité du chemin $t \in I \longmapsto \widetilde{H}(t, s) \in \mathbb{R}$, $\widetilde{H}(1, s)$ est un entier ; donc l'image de tout $\{1\} \times I$ est un entier. Par suite $\widetilde{\sigma} : t \in I \longmapsto \widetilde{H}(t, 0)$ et $\widetilde{\sigma}' : t \in I \longmapsto \widetilde{H}(t, 1)$ ont extrémité et σ et σ' ont même degré.

Réciproquement, supposons que σ et σ' ont même degré. Alors $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\sigma}'$ ont même origine et m me extrémité ; comme $\mathbb{R}$ est contractile, ils sont homotopes et σ et σ' sont aussi homotopes. □

4.3. Proposition. *Soient* σ *et* σ' *deux lacets de* $\mathbb{S}^1$ *basés en* 1. *Alors le degré du composé* $\gamma = \sigma\sigma'$ *est égal à la somme des degrés de* σ *et* σ'.

D*émonstration* Soient $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\sigma}'$ les relèvements respectifs de σ et σ' à $\mathbb{R}$. On définit l'application $\widetilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\widetilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \widetilde{\sigma}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \widetilde{\sigma}'(2t-1) + \widetilde{\sigma}(1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie que $\widetilde{\gamma}$ est un relèvement de γ ; ceci montre que $\deg(\sigma\sigma') = \deg(\sigma) + \deg(\sigma')$. $\square$

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le lacet $\sigma_n : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ est défini par $\sigma_n(t) = e^{2i\pi nt}$. Les propositions 4.1, 4.2 et 4.3 mises bout à bout donne le

4.3. Théorème. *L'application* $[\sigma] \in \pi_1(\mathbb{S}^1) \longmapsto deg(\sigma) \in \mathbb{Z}$ *est un isomorphisme de groupes d'inverse* $n \in \mathbb{Z} \longmapsto [\sigma_n] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

Références

[Be] Beardon, A. F. *The Geometry of Discrete Groups.* GTM 91, Springer-Verlag, (1983).

[BT] Bott, R. & Tu, L. *Differential Forms in Algebraic Topology.* GTM 82, Springer-Verlag, (1982).

[Ca] do Carmo, M. *Geometria riemanniena.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, (1988).

[Ch] Chabat, B. *Introduction à l'Analyse complexe.* Editions MIR, Tomes I et II.

[DNF] Doubrovine, B., Novikov, S. & Fomenko, A. *Géométrie contemporaine.* Tomes I, II et III Editions MIR, (1979).

[Fo] Fomenko, A. *Visual Geometry and Topology.* Springer-Verlag, (1994).

[Fr] Freitag, E. *Hilbert Modular Forms.* Springer-Verlag, (1990).

[Go] Godbillon, C. *Eléments de Topologie algébrique.* Collection Méthodes, Hermann, (1971).

[Gr] Grauert, H. On the Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. Ann. of Math. 68, (1958), 460-472.

[Ha] Hatcher, A. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002). Disponible : http://www.math.purdue.edu/ wilker/Math598F01/Hatcher-AT2001.pdf

[Hö] Hörmander, L. *An Introduction to Complex Analysis in severable Variables.* North-Holland, (1990).

[JS] Jones, G. & Singerman, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, (1987).

[La1] Lang, S. Faire des Maths : grands problèmes de géométrie et de l'espace. Revue du Palais de la découverte 12, 114, (1984), 21-72.

[La2] Lang, S. SL$(2,\mathbb{R})$. GTM 105, Springer-Verlag, (1985).

[Ma] Maass, H. *Lectures on Modular Functions of one Complex Variable.* Tata Institute of Fundamental Research, (1964).

[Mi] Miyake, T. *Modular Forms.* Springer-Verlag, (1989).

[Po] Postnikov, M. *Leçons de géométrie. Variétés différentiables.* Editions MIR, (1990).

[Rh] de Rham, G. *Variétés différentiables.* Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, (1960).

[Wl] Wall, C.T.C. *A geometric Introduction to Topology.* Dover Publications, (1993).

[Wa] Warner, F.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* GTM 94, Springer-Verlag, (1983).

[We] Weil, A. *Variétés kählériennes.* Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, (1971).

[Wh] Whitehead, G.W. *Elements of Homotopy Theory.* GTM 61, Springer-Verlag, (1978).