UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

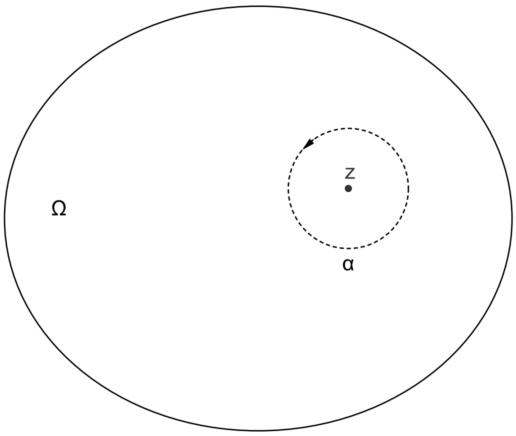
Master Enseignement - Mathématiques

Analyse 1

par

Aziz El Kacimi
aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr
http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/

Fonctions d'une variable complexe



f holomorphe sur l'ouvert Ω
α un chemin fermé entourant z

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

Formule de Cauchy

Année universitaire 2011-2012

AVANT-PROPOS

Le module ***Analyse 1*** en Master de Mathématiques est mutualisé : il est offert aux étudiants en Master Enseignement et à ceux en Master Recherche (Mathématiques fondamentales ou appliquées). Il se compose de trois parties indépendantes : i) analyse fonctionnelle ; ii) éléments de variable complexe ; iii) notions d'intérêt pour un enseignant du secondaire (enseignement qui se fera sous forme d'ateliers ou séminaires et où on voit en particulier l'intérêt du dessin dans la résolution de certains problèmes d'analyse). Le présent cours traite la deuxième partie ; il se limite aux éléments fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable complexe :

– Séries entières, rayon de convergence. Fonctions analytiques et quelques-unes de leurs propriétés essentielles telles que la C^∞-dérivabilité, le principe du prolongement analytique, leurs zéros isolés...

– Fonctions holomorphes, les diverses définitions. Intégration complexe et tout ce qui tourne autour.

– Formule de Cauchy et théorème de Cauchy pour les fonctions holomorphes. Les diverses conséquences qu'on en tire, entre autres l'analyticité d'une fonction holomorphe...

– Étude des singularités isolées d'une fonction holomorphe : singularité apparente, pôle ou singularité essentielle. On termine par le théorème des résidus (que les gens gardent toujours en souvenir) et toutes ses applications au calcul effectif des intégrales de fonctions d'une variable réelle.

– La dernière partie est consacrée à toute une série d'exercices assez diversifiés.

Septembre 2011

Aziz El Kacimi

Bibliographie

[Ahl] Ahlfors, L.V. *Complex Analysis.* Collection *Mathematics Series*, McGraw-Hill (1979).

[Car] Cartan, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Collection *Enseignement des Sciences*, Hermann (1985).

[LC] Lavrentiev, M. & Chabat, B. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe.* Éditions Mir, Moscou (1972).

[Vog] Vogel, P. *Fonctions analytiques.* Collection *Licence*, Dunod (1999).

CHAPITRE I

SÉRIES ENTIÈRES

1. Rappels sur les séries numériques

On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = x_0 + \cdots + x_n$; on obtient ainsi une nouvelle suite (S_n). Si (S_n) converge, on dit que la *série* de *terme général* x_n converge ; la limite S de (S_n) est la *somme* de la série (les quantités S_n sont appelées *sommes partielles*) ; on écrit $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Sinon, on dira que la série est *divergente*. Dorénavant la notation (x_n) désignera indifféremment la suite x_n ou la série qu'elle définit. Étudier la nature d'une série, c'est étudier sa convergence ou sa divergence.

On dira qu'une série (x_n) est *absolument convergente* si la série réelle à termes positifs $(|x_n|)$ est convergente. Toute série absolument convergente est convergente ; dans ce cas, on a $\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. La réciproque de cette implication est en général fausse (*cf.* Exercice 7).

Y a-t-il des critères qui permettent de décider de la convergence d'une série ? Oui, bien sûr ! D'abord, comme étudier une série revient en fait à étudier une suite, il y a le :

1.1. Critère de Cauchy. Il est lié à la complétude du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et illustré par l'équivalence des assertions qui suivent :

i) la série de terme général x_n converge ;

ii) la suite $S_n = x_0 + \cdots + x_n$ converge (par définition) ;

iii) la suite (S_n) est de Cauchy *i.e.* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ on ait : $n > m \geq N \Longrightarrow |S_n - S_m| = |x_{m+1} + \cdots + x_n| < \varepsilon$.

Lorsque tous les termes x_n sont des réels positifs, on dispose de pas mal de critères de convergence. Donnons-en quelques-uns. (Comme les termes nuls ne modifient en rien la nature de la série, on supposera que tous les x_n sont strictement positifs.)

1.2. Sommes partielles bornées. Supposons que les sommes partielles $S_n = x_0 + \cdots + x_n$ soient bornées par une constante $M > 0$ indépendante de n. Alors la suite (S_n) est croissante majorée par M, donc convergente *i.e.* la série (x_n) est convergente.

1.3. Critère de comparaison. On considère deux séries (x_n) et (y_n). On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $x_n \leq y_n$. Si la série (y_n) converge, il en est de même pour la série (x_n) ; si la série (x_n) diverge, il en est de même pour la série

(y_n). Pour montrer la convergence (resp. la divergence) d'une série à termes positifs, il suffit donc de la majorer (resp. la minorer) par une série qui converge (resp. qui diverge).

1. 4. Règle de d'Alembert. On suppose que la suite $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ converge vers une limite ℓ. Si $\ell < 1$, la série converge ; si $\ell > 1$, la série diverge. On ne peut rien dire en général lorsque $\ell = 1$. Mais il est possible que cette limite n'existe pas ; dans ce cas on peut utiliser uniquement le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$:

- S'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \alpha$ pour n suffisamment grand, la série converge.
- Si $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ pour n suffisamment grand, la série diverge.

1. 5. Règle de Cauchy. On suppose que la suite $(x_n)^{\frac{1}{n}}$ converge vers une limite ℓ. Si $\ell < 1$, la série (x_n) converge ; si $\ell > 1$, elle diverge. On ne peut rien dire en général lorsque $\ell = 1$. Comme précédemment, il est possible que cette limite n'existe pas ; dans ce cas on peut utiliser uniquement la suite $(x_n)^{\frac{1}{n}}$:

- S'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $(x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \alpha$ pour n suffisamment grand, la série converge.
- Si $(x_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$ pour n suffisamment grand, la série diverge.

Utiliser ce critère pour étudier la convergence ou la divergence de la série de terme général $x_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-n^2}$.

1. 6. Comparaison à une intégrale. Soient $\varepsilon > 0$ et $f : [\varepsilon, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Pour tout $t \in [\varepsilon, +\infty[$, on pose $F(t) = \int_\varepsilon^t f(\theta)d\theta$. La fonction $F : [\varepsilon, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie est croissante. Si la limite de F existe lorsque t tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_\varepsilon^{+\infty} f(t)dt$ est *convergente*. Supposons que, pour tout entier $n \geq \varepsilon$, $x_n = f(n)$. Alors la série (x_n) est convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_\varepsilon^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

1. 7. Opérations sur les séries

On se donne deux séries (x_n) et (y_n) de nombres complexes. On définit la *somme* des deux comme étant $(x_n + y_n)$ et leur *produit* sera la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}$. Alors :

i) si (x_n) et (y_n) sont convergentes, $(x_n + y_n)$ est aussi convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

ii) si (x_n) et (y_n) sont absolument convergentes, (w_n) est aussi absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

1. 8. Quelques exercices

1. Soit a un nombre réel non nul. Étudier, en fonction de a, la nature de la série de terme général $x_n = a^n$ dite *série géométrique* de *raison* a.

2. Montrer que la série de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ (dite *série harmonique*) est divergente. (On utilisera le critère de Cauchy.)

3. Soit α un nombre réel strictement positif. On appelle *série de Riemann* la série numérique de terme général $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Étudier, en fonction de α, la nature de cette série. (On utilisera le critère de comparaison à une intégrale convenable.)

4. Soient (x_n) et (y_n) deux séries à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = \sqrt{x_n y_n}$. Montrer que si (x_n) et (y_n) sont convergentes, il en est de même pour la série (z_n).

5. Étudier la nature des séries dont les termes généraux respectifs sont les suivants (pour $n \geq 1$) :

$$x_n = (-1)^n, \qquad y_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}, \qquad z_n = \frac{1}{n^2 - n + 1} \qquad \text{et} \qquad t_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^5-1}}.$$

6. Montrer que les séries numériques $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et $y_n = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$ sont convergentes et calculer leurs sommes respectives.

<u>Séries réelles alternées</u>

On dira qu'une série réelle (x_n) est *alternée* si elle s'écrit $x_n = (-1)^n u_n$ où $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit (x_n) une telle série. Supposons que la suite u_n tend en décroissant vers 0 ; alors la série (x_n) converge.

7. Soit (x_n) la série de terme général $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Dire pourquoi cette série est convergente mais non absolument convergente.

b) Appliquer convenablement la formule de Mac-Laurin à la fonction $f(x) = \mathrm{Log}(1+x)$ pour calculer la somme de cette série.

c) On considère maintenant la série de terme général $y_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)}$. Montrer qu'elle converge et calculer sa limite. Conclusion ?

8. On considère les séries $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n^2}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Que peut-on conclure ?

9. Soit (x_n) une suite à termes strictement positifs. On suppose que pour un réel $p \geq 1$, la série (x_n^p) converge. Montrer que, pour tout réel q tel que $q \geq p$, la série (x_n^q) converge.

2. Séries entières

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \tag{I.1}$$

On définit ainsi une fonction $S_N : z \in \mathbb{C} \longmapsto S_N(z) \in \mathbb{C}$. On se pose une question toute naturelle : *pour quelles valeurs de z la limite (quand N tend vers $+\infty$) de la quantité $S_N(z)$ existe-t-elle ?* La proposition qui suit est facile à démontrer :

2.1. Proposition. *S'il existe $r \in [0, +\infty[$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$ pour tout $\rho < r$.*

Si tel est le cas, on a donc une fonction f bien définie sur le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

On appelle **rayon de convergence** *de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le plus grand nombre réel positif R (fini ou égal à $+\infty$) tel que la série converge pour $|z| < R$.* Ce nombre peut être nul, strictement positif ou égal à $+\infty$ comme on le verra sur les exemples qui vont suivre.

Quitte à renuméroter les coefficients a_n on peut supposer qu'ils sont tous non nuls. Le rayon de convergence R de la série est alors donnée par l'une des formules qui suivent.

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(Formule de Hadamard)} \tag{I.2}$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \qquad \text{(Formule de d'Alembert)} \tag{I.3}$$

Le lemme qui suit est très utile dans l'étude de la convergence des séries entières.

2.2. Lemme d'Abel. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ une série où les a_n sont réels positifs et les x_n des nombres complexes. On suppose :*

i) *que la suite (a_n) est décroissante et tend vers 0 ;*

ii) *qu'il existe une constante $K > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $|\sum_{i=m}^{n} x_i| \leq K$ pour tous $n \geq m \geq n_0$.*

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ converge.

Il permet, entre autres, d'établir la proposition qui suit.

2.3. Proposition. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

(i) *pour tout $r < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D}(0, r)$. On dira que $D(0, R)$ est le* **disque de convergence** *de la série.*

(ii) *pour tout $r > R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge.*

Tout peut se produire sur le cercle $|z| = R$. On donnera des exemples sur lesquels on peut voir différentes situations.

2.4. Exemples

• La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) z^n$ a un rayon de convergence $R = 0$: elle ne converge que pour $z_0 = 0$.

• Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ont un rayon de convergence $R = 1$. La différence est notable au niveau de la convergence sur le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$: la première y diverge, la deuxième y converge sauf en $z = 1$ et la troisième y converge en tout point ! (Le lecteur est prié de justifier toutes ces affirmations.)

2.5. Exercice

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que, pour $s \in \mathbb{N}^*$, la série *dérivée* $s^{\text{ème}}$ de f :

$$f^{(s)} = \sum_{n=s}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-s+1)a_n z^{n-s}$$

a aussi pour rayon de convergence R.

3. Exponentielle et logarithme complexes

Nous avons vu que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ la quantité $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ existe donc ; elle sera notée e^z. On a alors une fonction bien définie $z \in \mathbb{C} \longmapsto e^z \in \mathbb{C}$ appelée *exponentielle complexe*. Comme la série converge uniformément sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$, cette fonction est continue. En fait on a plus :

3.1. Proposition. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes.*

i) *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$.*

ii) *L'exponentielle est un morphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

Démonstration. i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!}$. Un calcul simple utilisant la formule du binôme de Newton montre que $w_n = \frac{(z+z')^n}{n!}$. D'après 1.7.ii) la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$ converge et on a :

$$e^{z+z'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = e^z \cdot e^{z'}.$$

ii) Comme $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a $e^0 = 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$; alors $e^{z+(-z)} = e^z \cdot e^{-z} = 1$ et donc $e^z \in \mathbb{C}^*$. Le fait que l'exponentielle soit un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ est donné par le point i). Nous verrons par la suite qu'il est surjectif mais non injectif (et on déterminera son noyau). ♢

De cette proposition il découle que $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. On connaît assez bien l'exponentielle e^x (x est réel). Décortiquons e^{iy}. On a :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!}\right) + i\left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) = \cos y + i \sin y.$$

D'où $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$; par suite le module de e^z est e^x et son argument $\mathrm{Arg}(z)$ est y (modulo 2π).

3.2. Autres fonctions

L'exponentielle complexe permet de définir d'autres fonctions généralisant celles que l'on connaît habituellement dans le domaine réel.

• Fonctions trigonométriques circulaires. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Mais aussi :

$$\mathrm{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

et :

$$\mathrm{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

• Fonctions trigonométriques hyperboliques. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Mais aussi :

$$\mathrm{th}(z) = \frac{\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{2k+1}{2}i\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

et :

$$\mathrm{coth}(z) = \frac{\mathrm{ch}(z)}{\mathrm{sh}(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{ki\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Les quatre fonctions cos, sin, ch et sh ont comme développement en série entière :

$$\cos(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} \qquad \sin(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$\mathrm{ch}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p}}{(2p)!} \qquad \mathrm{sh}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

chacune d'elles ayant un rayon de convergence infini.

3.3. Logarithme complexe

Dans le cas réel la fonction exponentielle $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \in \mathbb{R}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En fait, c'est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. La fonction réciproque est bien connue : c'est le logarithme $t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln t \in \mathbb{R}$. La situation est différente pour le cas complexe : certes l'exponentielle $z \in \mathbb{C} \longmapsto e^z \in \mathbb{C}^*$

est surjective mais elle n'est pas injective, ce qui pose un problème pour définir la "fonction réciproque". Il y en aura beaucoup ; on dira alors que c'est une fonction *multiforme*. Pour en avoir une il faut se restreindre à des ouverts du plan complexe $\mathbb{C}$.

Pour tout $z = x + iy$ on a bien sûr $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Cette fonction envoie la droite d'équation $y = \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) sur la demi-droite Δ privée de l'origine faisant un angle θ (modulo 2π) avec l'axe Ox (*cf.* le dessin qui suit). On voit alors que f réalise une bijection de l'ouvert $U = \mathbb{R}\times]\theta, \theta + 2\pi[$ sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Delta$.

Une *détermination* de la fonction logarithme complexe devrait être bien sûr de la forme $g(w) = \ln|w| + i\mathrm{Arg}(w)$ pour qu'elle vérifie $e^{g(w)} = w$. La *détermination principale* est donnée lorsqu'on prend $\theta = -\pi$: $g_0(w) = \ln|w| + i\mathrm{Arg}(w)$ sur l'ouvert $\mathbb{C}\setminus\{y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$. Toute autre détemination est de la forme $g_k = g_0 + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Fonctions analytiques

4.1. Variable réelle

• Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *analytique réelle* si tout point $x_0 \in I$ possède un voisinage ouvert $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$ sur lequel la fonction f s'écrit sous forme d'une série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ où (a_n) est une suite de nombres complexes. Pour $0 < \eta < \varepsilon$, la série converge uniformément sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ et donc f est continue. Plus même : d'après l'exercice 2.5, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ la série $s^{\text{ème}}$ dérivée $f^{(s)}(z) = \displaystyle\sum_{n=s}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-s+1)a_n z^{n-s}$ converge uniformément sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. La fonction f est donc de classe C^∞.

Par exemple, parmi les fonctions usuelles, toutes celles qui suivent sont analytiques là où elles sont définies :

Une fonction polynôme $\qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

$$\text{Une fonction rationnelle} \qquad \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

$$\ln(x) \qquad e^x \qquad \mathrm{ch}(x) \qquad \mathrm{sh}(x) \qquad \cos(x) \qquad \sin(x).$$

Une fonction de classe C^∞ n'est pas forcément analytique. L'exemple le plus simple et le plus connu est celui de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

(La démonstration est laissée en exercice au lecteur.)

• Soient maintenant U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout point $z_0 = (x_0, y_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que sur le disque ouvert $D(z_0, \varepsilon)$, f admet un développement en série entière :

$$f(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}(x - x_0)^n (y - y_0)^m$$

où les a_{nm} sont des constantes complexes. Comme dans le cas d'une variable, la série converge uniformément sur tout compact du disque $D(z_0, \varepsilon)$ ainsi que toutes les dérivées partielles. La fonction est donc de classe C^∞.

4.2. Variable complexe

• Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout $z_0 \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que, sur le disque ouvert $D(z_0, \varepsilon)$, f s'écrit sous forme d'une série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{I.4}$$

où les a_n sont des constantes complexes.

Par exemple, comme dans le cas d'une variable réelle, les fonctions qui suivent sont analytiques là où elles sont définies :

$$\text{Une fonction polynôme} \qquad P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

$$\text{Une fonction rationnelle} \qquad \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

$$\ln(z) \qquad e^x \qquad \mathrm{ch}(z) \qquad \mathrm{sh}(z) \qquad \cos(z) \qquad \sin(z).$$

Il existe des fonctions usuelles qui ne sont pas analytiques : par exemple la fonction $z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$! Mais elle est analytique en tant que fonction des deux variables x et y

puisque $\overline{z} = x - iy$! L'analyticité réelle d'une fonction d'une variable complexe n'implique donc pas l'analyticité de celle-ci.

• On vérifie aisément que la somme $f+g$, le produit fg, le quotient $\frac{f}{g}$ (là où il est défini) de deux fonctions analytiques f et g sont des fonctions analytiques. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions analytiques avec $f(U) \subset V$ la composée $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction analytique.

4.3. Unicité du développement. *Supposons que deux séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ convergeant sur un disque $D(z_0, R)$ coïncident sur une suite $(z_k)_{k\geq 1}$ (dans ce disque) s'accumulant sur z_0. Alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_0 + a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots = b_0 + b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots \tag{I.5}$$

Soit r tel que $0 < r < R$. Comme les deux sommes sont continues sur le disque fermé de centre z_0 et de rayon r, on a :

$$\lim_{k\to\infty}(a_0 + a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots) = \lim_{k\to\infty}(b_0 + b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots)$$

et donc $a_0 = b_0$. L'expression (I.5) devient alors :

$$a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots = b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots$$

On divise les deux membres par $z_k - z_0$ et on refait le même raisonnement ; on obtient alors $a_1 = b_1$. De cette façon on montre que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\diamondsuit$

Ceci va nous permettre d'établir le théorème qui suit qui donne une propriété remarquable des fonctions analytiques.

4.4. Principe du prolongement analytique. *Soient f et g deux fonctions analytiques définies sur un ouvert U connexe de $\mathbb{C}$. Supposons que f et g coïncident sur les points d'une suite (z_k) s'accumulant sur un point $z_0 \in U$. Alors f et g sont égales.*

Démonstration. Soient $z \in U$ différent de z_0 et γ un chemin $[0,1] \longrightarrow U$ d'origine z_0 et d'extrémité z (il existe car U étant un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ il est aussi connexe par arcs). Comme $\gamma([0,1]) = C$ (image de la courbe dans $\mathbb{C}$) est un compact, il existe $r > 0$ et un nombre fini de disques ouverts $D_0, D_1, \cdots, D_\ell$ centrés respectivement en $z_0, z_1, \cdots, z_\ell = z$ de rayon r et tels que :

– $C \subset D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_\ell$;

– le disque D_j contient le point z_{j+1} (centre du disque D_{j+1}) ;

– les fonctions f et g admettent sur chacun des D_j un développement en série (uniformément convergent).

Comme les fonctions f et g sont égales sur l'ensemble $D_0 \cap \{z_j : j \in \mathbb{N}^*\}$, d'après le théorème I.4.3 qui précède, elles sont égales sur D_0. Mais D_0 contient le point z_1 qui est un point d'accumulation d'une suite dans D_1 sur laquelle les fonctions f et g vont coïncider ! Le même raisonnement montre alors que f et g vont aussi coïncider sur D_1. En poursuivant la même démarche on montre ainsi que f et g sont égales sur la réunion $D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n$ et par suite $f(z) = g(z)$. Comme aucune hypothèse particulière n'a été faite sur le point z, les fonctions f et g sont donc égales sur U. $\diamondsuit$

4.5. Zéros d'une fonction analytique

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On appelle *zéro* de f tout point $z \in U$ tel que $f(z) = 0$.

Supposons que f n'est pas identiquement nulle sur U connexe. Alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est un ensemble discret de U.

Démonstration. Comme f est continue, $Z(f)$ est une partie fermée de U. Montrons que chacun de ses points est isolé. Soit $z_0 \in Z(f)$; alors f se développe sur un voisinage de ce point en série entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Comme elle n'est pas identiquement nulle sur ce voisinage (sinon elle serait nulle partout en vertu du théorème I.4.4) l'un au moins des coefficients a_n est non nul ; soit p le plus petit des entiers n tel que $a_n \neq 0$. Alors on peut écrire $f(z) = (z - z_0)^p Q(z)$ où $Q(z) = (a_p + a_{p+1}(z - z_0) + a_{p+2}(z - z_0)^2 + \cdots)$. La fonction $Q(z)$ étant analytique en z_0 elle y est a fortiori continue et donc non nulle sur un voisinage de z_0. Par conséquent le seul point en lequel f est nulle sur ce voisinage est le point z_0 ; ce qui montre que z_0 est isolé dans $Z(f)$. $\diamondsuit$

CHAPITRE II

FONCTIONS HOLOMORPHES

1. Préliminaires et premières définitions

1.1. $\mathbb{R}$-linéarité et $\mathbb{C}$-linéarité

• On sait que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même ; il a pour base (entre autres) le nombre 1. Mais si on le voit comme espace vectoriel réel sa dimension est 2 ; une base en est $\{1, i\}$ qui permet d'écrire tout nombre complexe z de façon unique sous la forme qu'on connaît $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

• Un application linéaire $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto f(z) \in \mathbb{C}$ est toujours de la forme $f(z) = \alpha z$ avec $\alpha = f(1)$. Si $\alpha = a + ib$, alors $f(z) = \alpha z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$. Donc, si on voit f comme application du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$ dans lui-même, sa matrice par rapport à la base $\{1, i\}$ est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On peut vérifier facilement qu'une application $\mathbb{R}$-linéraire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dont la matrice par rapport à cette base est de cette forme est aussi $\mathbb{C}$-linéaire.

Par exemple, l'application conjugaison $z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire mais elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire !

• Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire (mais qu'on voit comme $\mathbb{R}$-linéaire) de matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; alors on peut toujours écrire $A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où θ et un réel (donné modulo 2π). Par conséquent, du point de vue géométrique, une application $\mathbb{C}$-linéaire n'est rien d'autre qu'une similitude directe de centre l'origine : c'est la composée de l'homothétie de centre 0 et de rapport $\sqrt{a^2 + b^2}$ et de la rotation de centre 0 et d'angle θ.

1.2. Définition de l'holomorphie

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

*On dira que f est **holomorphe** au point $z_0 \in U$ si elle est dérivable en ce point, c'est-à-dire si la limite suivante existe :*

(II.1)
$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

*Cette limite est notée $f'(z_0)$ et appelée **dérivée** de f au point z_0. On dira que f est holomorphe sur U si elle est holomorphe en tout point de U.*

Formellement, c'est la même définition que pour la dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle. Mais en réalité, demander à une fonction d'être holomorphe lui impose des contraintes extrêmement fortes comme nous le verrons par la suite. Regardons d'abord quelques exemples.

• Les fonctions usuelles que nous avons déjà évoquées :

Une fonction polynôme $\qquad P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$

Une fonction rationnelle $\qquad \dfrac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$

$$\ln(z) \qquad e^x \qquad \mathrm{ch}(z) \qquad \mathrm{sh}(z) \qquad \cos(z) \qquad \sin(z).$$

sont holomorphes (facile à vérifier).

• Toute fonction analytique $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. En effet, f étant analytique, pour tout point $z_0 \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait :

$$\text{(II.2)} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{pour} \qquad |z - z_0| < \varepsilon.$$

On sait alors que la série dérivée $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ converge uniformément pour $|z - z_0| \leq \rho$ avec $0 < \rho < \varepsilon$; donc f est dérivable au point z_0 au sens de la définition II.1.2. *i.e.* f est holomorphe en z_0.

• On vérifie facilement (exactement comme on le fait pour les fonctions d'une variable réelle) que la somme $f+g$, le produit fg, le quotient $\frac{f}{g}$ (là où il est défini) de deux fonctions holomorphes sont des fonctions holomorphes.

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes avec $f(U) \subset V$ la composée $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe et on a $(g \circ f)'(z) = f'(z) g'(f(z))$. Si $f : U \longrightarrow V$ est une bijection et f est holomorphe en z_0 avec $f'(z_0) \neq 0$, alors f^{-1} est holomorphe en $w_0 = f(z_0)$ et $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

• Une bijection $f : U \longrightarrow V$ (U et V des ouverts de $\mathbb{C}$) holomorphe avec inverse f^{-1} holomorphe est appelée *biholomorphisme* de U sur V. On dira aussi que U et V sont *biholomorphiquement équivalents*.

Par exemple la fonction $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme du demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

L'ensemble $\mathrm{Aut}(U)$ des biholomorphismes d'un ouvert U est un groupe pour la composition des applications. Il est toujours contenu dans le groupe $\mathrm{Diff}(U)$ des difféomorphismes de U et est beaucoup plus petit.

• **Exemple non holomorphe**. La fonction $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(z) = \overline{z}$ n'est holomorphe nulle part. Vérifions-le au point $z_0 = 0$ en calculant $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \dfrac{\phi(z) - \phi(0)}{z} = \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \dfrac{\overline{z}}{z}$

lorsque z tend vers 0 par valeurs réelles et lorsque z tend vers 0 par valeurs imaginaires pures. On a :

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z \text{ réel } \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z \text{ imaginaire } \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Les deux limites ne coïncident pas, donc ϕ n'est pas holomorphe en 0.

1.3. Conditions de Cauchy-Riemann

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $z_0 \in U$. On sait alors que $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe. Cela signifie que :

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + \varepsilon(z)|z-z_0| \tag{II.3}$$

avec $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \varepsilon(z) = 0$. Écrivons $z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$, $f(z) = u(z)+iv(z)$, $f'(z_0) = a+ib$, $z - z_0 = h + ik$ et $\varepsilon = \alpha + i\beta$. Alors l'expression (II.3) devient en coordonnées réelles :

$$\begin{cases} u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0,y_0) = ah - bk + \alpha\sqrt{h^2+k^2} \\ v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0,y_0) = bh + ak + \beta\sqrt{h^2+k^2} \end{cases} \tag{II.4}$$

Ceci montre que la fonction $f : (x,y) \in U \longmapsto u(x,y) + iv(x,y) \in \mathbb{C}$ est différentiable au point $z_0 = (x_0, y_0)$ et de différentielle $d_{z_0}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$ avec :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \tag{CR}$$

Les relations (CR) sont appelées *conditions de Cauchy-Riemann*. Cela signifie que f est différentiable au point z_0 (au sens réel) et sa différentielle $d_{z_0}f$ (qui est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) est en fait $\mathbb{C}$-linéaire.

Si on considère f comme fonction complexe des variables réelles x et y, les conditions (CR) s'écrivent aussi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0. \tag{II.5}$$

Comme $z = x + iy$, on a $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. On peut donc considérer z et $\overline{z}$ comme des variables par rapport auxquelles on peut aussi dériver :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

et
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$
Les conditions (CR) s'écrivent donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

On peut montrer facilement qu'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiable au point z_0 et y vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann est holomorphe en ce point. On a donc l'équivalence :

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe en } z_0 \Longleftrightarrow f \text{ différentiable en } z_0 \text{ et vérifie (CR).}$$

1.4. Quelques conséquences de l'holomorphie

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un domaine (ouvert connexe) U de $\mathbb{C}$.

• Il est clair que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$ si f est constante. Réciproquement, on vérifie aisément que si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$ alors f est constante.

• Si la partie réelle, la partie imaginaire, le module ou l'argument de f est constant, la fonction f est constante. Tout ceci découle du fait qu'une fonction holomorphe sur le domaine U y vérifie les conditions de Cauchy-Riemann.

– Si $u = \Re f$ est constante alors $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$; donc $\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(z) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$. Par suite $d_z f = 0$ en tout point $z \in U$, donc f est constante. Le même raisonnement vaut pour la partie imaginaire de f.

– Si le module de f est constant, cela signifie que la fonction $u^2 + v^2$ est constante. Donc $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ et $u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Les conditions (CR) donnent alors :

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

On regarde ces deux relations comme un système linéaire homogène dont les inconnues sont $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. Si son déterminant $u^2 + v^2$ est nul, alors f est identiquement nulle ; sinon $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, donc u est constante et par suite f l'est aussi comme on l'a vu précédemment.

– On suppose maintenant $\mathrm{Arg}(f) = \alpha$ constant. Alors la partie imaginaire $\Im(e^{-\alpha} f)$ de $e^{-\alpha} f$ est nulle, donc la fonction $e^{-\alpha} f$ est constante et par suite f l'est aussi. ♢

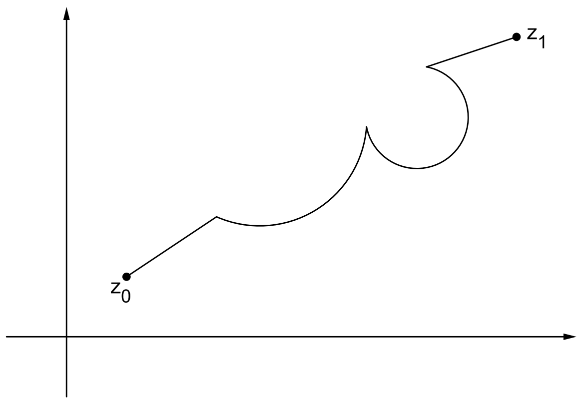
2. Intégration complexe

C'est un outil fondamental en théorie des fonctions d'une variable complexe. Nous allons définir l'intégrale sur un chemin d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ où U est un domaine de $\mathbb{C}$. On supposera f continue puisque, de toutes façons, on n'aura affaire par la suite qu'aux fonctions holomorphes.

2.1. Intégrale sur un chemin

• Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle *chemin* dans U d'*origine* z_0 et d'*extrémité* z_1 toute application continue $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ telle que $\gamma(a) = z_0$ et $\gamma(b) = z_1$. Un chemin fermé est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues *i.e.* $z_0 = z_1$; on dira alors que c'est un *lacet* de base z_0.

On dira qu'un chemin γ est C^1 par *morceaux* s'il existe une subdivision de l'intervalle $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ telle que γ soit C^1 sur chacun des intervalles ouverts $]t_i, t_{i+1}[$ (avec $i = 0, \cdots n-1$) et $\gamma'(t)$ admet une limite à droite de t_i et une limite à gauche de t_{i+1}.



• Soit $\gamma : t \in [a, b] \longmapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t) \in U$ un chemin C^1 par morceaux donné comme précédemment. On définit l'*intégrale* de f sur γ comme l'intégrale ordinaire qui suit :

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))d\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \{x'(t) + iy'(t)\} dt. \tag{II.6}$$

• On a les propriétés qui suivent.

– L'intégrale (II.6) ne dépend pas du paramétrage du chemin γ. Vérifions-le pour γ de classe C^1 partout (le cas C^1 par morceaux se traite presque de la même manière). Soit $\tau : s \in [c, d] \longmapsto t = \tau(s) \in [a, b]$ un changement de paramétrage de la courbe γ. Alors, la formule de changement de variable sur les intégrales nous donne :

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_c^d f(\gamma(\tau(s))\tau'(s)\gamma'(\tau(s))ds = \int_c^d f(\gamma \circ \tau(s))(\gamma \circ \tau)'(s)ds$$

qui montre bien l'indépendance de l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ par rapport au paramétrage du chemin γ.

– On a de façon évidente :

$$\int_\gamma (f(z)+g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz, \qquad \text{et} \qquad \int_\gamma \lambda f(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *i.e.* l'intégrale est linéaire en l'argument f.

– Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ un chemin dans U d'origine z_0 et d'extrémité z_1 et C^1 par morceaux. Alors l'application $\gamma^{-1} : [-b,-a] \longrightarrow U$ définie par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(-t)$ est un chemin dans U de classe C^1 par morceaux d'origine z_1 et d'extrémité z_0 ; c'est le chemin γ parcouru en sens inverse. On a :

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

• **Exemple fondamental**. La fonction $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ est définie et holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$. Calculons son intégrale sur le chemin γ (C^1 partout), paramétré par $[0,1]$ et donné par $\gamma(t) = z_0 + re^{2i\pi t}$ où r est un réel strictement positif ; γ est tout simplement le cercle centré en z_0 et de rayon r. On a :

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{1}{re^{2i\pi t}} d(z_0 + re^{2i\pi t}) = 2i\pi \int_0^1 dt = 2i\pi.$$

Si on prend cette fois-ci $\gamma_n(t) = z_0 + re^{2i\pi n t}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ (toujours paramétré par $[0,1]$), alors γ_n est le cercle de centre z_0 et de rayon r décrit n fois dans le sens positif si $n > 0$ et le sens négatif si $n < 0$. Dans ce cas :

$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi n.$$

En fait, pour tout chemin fermé γ ne passant pas par z_0, le nombre $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ est un entier relatif. On l'appelle *indice* de γ par rapport à z_0 et on le note $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$.

• Soient $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ et $\gamma_2 : [a,b] \longrightarrow U$ deux chemins C^1 par morceaux tels que l'origine de γ_2 soit égale à l'extrémité de γ_1. On peut définir un chemin *produit* de γ_1 et γ_2 noté $\gamma_1\gamma_2$ par :

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a) & \text{si } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ \gamma_2(2t-b) & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

Soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans U ayant même origine z_0 et même extrémité z_1. Question naturelle : *quel rapport y a-t-il entre les deux intégrales* $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ *et* $\int_{\gamma_2} f(z)dz$? Évidemment $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ si, et seulement si, $\int_{\gamma_1\gamma_2^{-1}} f(z)dz = 0$. Le problème de l'indépendance de l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ par rapport au chemin γ lorsqu'on prescrit l'origine et l'extrémité se pose donc. Dans cette direction on a la :

2.2. Proposition. *Soient $P, Q : U \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues. Alors les deux intégrales $\int_{\gamma_1} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$ et $\int_{\gamma_2} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$ sont égales pour n'importe quel couple de chemins γ_1 et γ_2 ayant même origine z_0 et même extrémité z_1 si, et seulement si, il existe une fonction $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial h}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = Q$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial h}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial h}{\partial x} = Q$. Soient z_0 et z_1 deux points de U et γ_1 et γ_2 deux chemins ayant même origine z_0 et même extrémité z_1. On va montrer que $\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = 0$ où γ est le lacet $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ de base z_0. On a :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} &= \int_\gamma \left\{\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy\right\} \\
&= \int_\gamma \left\{\frac{\partial h}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial h}{\partial y}y'(t)\right\} dt \\
&= \int_\gamma \frac{d}{dt}(h\circ\gamma)(t)dt \\
&= \int_{\gamma_1} \frac{d}{dt}(h\circ\gamma)(t)dt + \int_{\gamma_2{}^{-1}} \frac{d}{dt}(h\circ\gamma)(t)dt \\
&= (h(\gamma_1(b)) - h(\gamma_1(a)) + (h(\gamma_2(a)) - h(\gamma_2(b)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que pour deux chemins γ_1 et γ_2 ayant même origine et même extrémité $\int_{\gamma_1} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{\gamma_2} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$. On choisit un point base z_0 dans U. Pour tout $z \in U$, soit γ n'importe quel chemin d'origine z_0 et d'extrémité z ; on pose :

$$h(z) = \int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{z_0}^{z} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}.$$

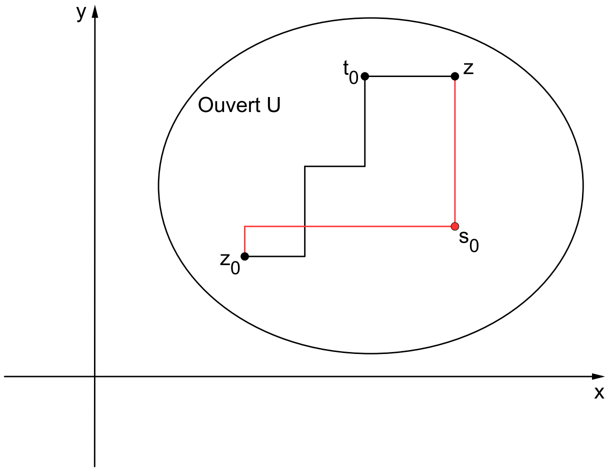
Cette quantité ne dépend pas du chemin qui joint z_0 à z ; on a donc une fonction bien définie. Si γ est une ligne polygonale dont le dernier segment est horizontal alors, sur ce dernier segment, y est constante et donc $dy = 0$; l'intégrale s'écrit donc :

$$h(z) = \int_{z_0}^{t_0} \{P(t,y) + Q(x,y)\}dt + \int_{t_0}^{z} P(t,y)dt = \int_{t_0}^{z} P(t,y)dt + \text{constante en } x.$$

En dérivant par rapport à la première variable, on trouve $\frac{\partial h}{\partial x}(z) = P(z)$. En prenant cette fois-ci γ une ligne polygonale dont le dernier segment est vertical alors, sur ce dernier segment, x est constante et donc $dx = 0$; l'intégrale s'écrit donc :

$$h(z) = \int_{z_0}^{s_0} \{P(x,y) + Q(x,s)\}ds + \int_{s_0}^{z} Q(x,s)ds = \int_{s_0}^{z} Q(x,s)ds + \text{constante en } y.$$

En dérivant par rapport à la deuxième variable, on trouve $\frac{\partial h}{\partial y}(z) = Q(z)$. Ce qui démontre la proposition. $\diamondsuit$



2.3. Dans le cas où il existe une fonction $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial h}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial h}{\partial x} = Q$ on dira que la *forme différentielle* $\omega = Pdx + Qdy$ est *exacte i.e.* $dh = \omega$; cela signifie que ω est la différentielle de la fonction h ; h est alors une *primitive* de ω ; toute autre primitive est de la forme h + constante.

On dira qu'une forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$, avec cette fois-ci P et Q de classe C^1, est *fermée* si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Comme $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$ (théorème de Schwarz pour une fonction de classe C^2), une forme différentielle exacte est toujours fermée ; la réciproque n'est pas vraie comme on peut le voir sur la 1-forme $\omega = \frac{dz}{z}$ définie sur $\mathbb{C}^*$.

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est holomorphe, la forme différentielle $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$ est fermée. Cela découle du fait que $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Dans le même ordre d'idées on peut se poser la question quand une forme différentielle complexe $f(z)dz$ ($f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ étant continue) est-elle exacte *i.e.* existe-t-il une fonction $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $dh = fdz$? La réponse est bien entendu donnée aussi par la proposition 2.2. En écrivant $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$, une telle fonction h, si elle existe, doit satisfaire $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = if$ et donc $\frac{\partial h}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial y} = 0$; par suite h doit être holomorphe. (On verra par la suite que cela implique que la fonction f elle-même est holomorphe.)
Conclusion : f admet une primitive si, et seulement si, pour tout lacet γ dans U et C^1 par morceaux, l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ est nulle.

CHAPITRE III

FORMULE ET THÉORÈME DE CAUCHY

1. Homotopie

On se donne un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (donc connexe par arcs). On rappelle qu'un chemin dans U d'origine z_0 et d'extrémité z_1 est une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Le chemin est dit *fermé* si $z_0 = z_1$. Si $\gamma(t) = z_0$ pour tout $t \in [0,1]$ on dira que le chemin γ est *constant*.

On note $C([0,1], U)$ l'ensemble de tous les chemins dans U qu'on munit de la topologie associée à la distance $d(\gamma, \sigma) = \sup_{t\in[0,1]} |\gamma(t) - \sigma(t)|$.

1.1. Définition. *On dira que deux chemins γ_0 et γ_1 sont* **homotopes** *s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$, appelée* **homotopie** *entre γ_0 et γ_1, telle que $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.*

Cela signifie que le chemin γ_0 se déforme continûment et se meut dans U jusqu'à se superposer au chemin γ_1 : en effet, à l'instant $s = 0$, on est sur γ_0, à l'instant s, on est sur le chemin $\gamma_s(t) = H(s,t)$ et à l'instant $s = 1$ (au bout d'une heure !) on est sur γ_1. En d'autres termes, il existe un chemin dans l'espace métrique $(C([0,1], U), d)$ d'origine γ_0 et d'extrémité γ_1 ! Si deux chemins quelconques dans U sont toujours homotopes, l'espace métrique $(C([0,1], U), d)$ est connexe par arcs.

On dira que γ_0 et γ_1 sont *homotopes relativement à* $\{z_0, z_1\}$ s'il existe une homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$ telle que $H(s,0) = z_0$ et $H(s,1) = z_1$ pour tout $s \in [0,1]$; ceci force donc γ_0 et γ_1 à avoir la même origine et la même extrémité.

On ne considérera dans toute la suite que l'homotopie entre chemins ayant même origine et même extrémité. On a la proposition qui suit (la démonstration est laissée au lecteur).

1.3. Définition. *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $z_0, z_1 \in U$. On note $C(U; z_0, z_1)$ l'ensemble des chemins dans U joignant z_0 à z_1. On a les propriétés qui suivent.*

i) *Dans $C(U; z_0, z_1)$ la relation "être homotope à" est une relation d'équivalence.*

ii) *Si γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $C(U; z_0, z_1)$, σ_0 et σ_1 sont homotopes dans $C(U; z_1, z_2)$ alors les composés $\gamma_0\sigma_0$ et $\gamma_1\sigma_1$ sont homotopes dans $C(U; z_1, z_2)$.*

1.2. Définition. *On dira que l'ouvert U est* **simplement connexe** *s'il est connexe et si tout chemin dedans est homotope à un chemin constant.*

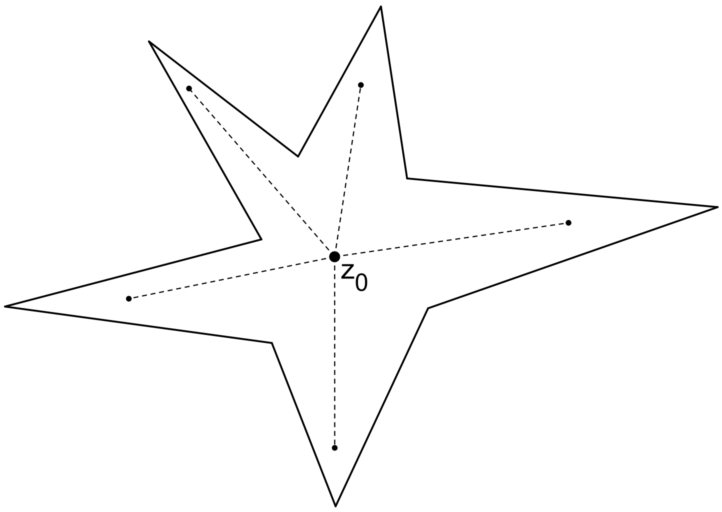
Cette notion est capitale. Elle est fortement utilisée lorsqu'on cherche à uniformiser des fonctions qui a priori sont multiformes telles la fonction logarithme complexe, les fonctions $z^{\frac{1}{n}}$ *etc.* Nous allons donner quelques exemples d'ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ et d'ouverts non simplement connexes.

1.3. Exemples

• Tout ouvert U convexe est simplement connexe. En effet, soient γ_0 et γ_1 deux chemins quelconques dans U. Alors l'application $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$ définie par $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$ est une homotopie entre γ_0 et γ_1. En particulier, tout lacet est homotope à un chemin constant.

Le plan complexe $\mathbb{C}$ lui-même, le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 0\}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ sont simplement connexes.

• On dira que U est *étoilé* par rapport au point z_0 si, pour tout $z_1 \in U$, le segment $[z_0 z_1] = \{(1-s)z_0 + sz_1 : 0 \leq s \leq 1\}$ est contenu dans U. Un tel ouvert est simplement connexe. Par exemple, $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite fermée est un ouvert simplement connexe: il est étoilé par rapport à tout point dans le prolongement de cette demi-droite qui la complète en droite !



Ouvert étoilé

• Par contre $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe. De façon générale, $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini (ou dénombrable) de points n'est pas simplement connexe. Une couronne n'est pas simplement connexe.

Les exemples sont assez nombreux. Nous laissons le lecteur libre à son imagination d'en fabriquer comme bon lui semble.

• La simple connexité est une notion topologique : tout ouvert homéomorphe à un ouvert simplement connexe est simplement connexe.

2. Théorème de Cauchy

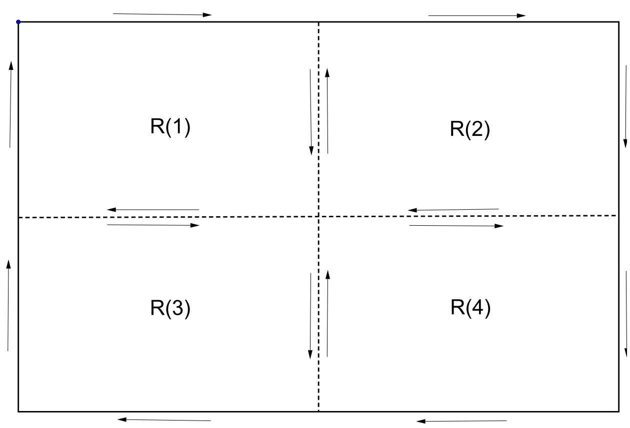
Il admet diverses versions qui sont fondamentalement les mêmes ; elles diffèrent simplement au niveau de leurs formulations et la nature topologique de l'ouvert sur lequel la fonction est holomorphe. Nous commencerons par le cas d'un rectangle.

2.1. Théorème de Cauchy 1. *Soient U un ouvert connexe, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et R un rectangle contenu dans U. Alors :*

$$I(f, \partial R) = \int_{\partial R} f(z)dz = 0. \tag{III.1}$$

où ∂R désigne le bord du rectangle R.

Démonstration. Pour simplifier, la quantité $I(f, \partial R)$ sera notée simplement $I(R)$. On divise le rectangle R en quatre rectangles $R(1), R(2), R(3), R(4)$ comme sur la figure qui suit.



On a alors $I(R) = I(R(1)) + I(R(2)) + I(R(3)) + I(R(4))$. (L'intégrale de f sur chacun des côtés intérieurs se répète sur le même côté avec l'orientation opposée, donc la somme des deux donne 0.) Si on avait $|I(R(j))| < \frac{|I(R)|}{4}$ pour tout $j = 1, 2, 3, 4$ on aurait :

$$|I(R)| \leq |I(R(1))| + |I(R(2))| + |I(R(3))| + |I(R(4))| < |I(R)|,$$

ce qui est absurde ; donc l'un au moins des rectangles $R(j)$ est tel que $|I(R(j))| \geq \frac{|I(R)|}{4}$; notons-le R_1. On refait la même chose avec R_1 ; on obtient un nouveau rectangle $R_2 \subset R_1$ tel que $I(R_2) \geq \frac{|I(R_1)|}{4} \geq \frac{|I(R)|}{4^2}$. De cette manière on construit une suite de rectangles $(R_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \cdots \quad \text{et} \quad |I(R_n)| \geq \frac{|I(R)|}{4^n}. \tag{III.2}$$

L'intersection des rectangles de la suite décroissante (R_n) (compacts dont le diamètre tend vers 0) est un point $w \in R$. Comme f est holomorphe en w, $f'(w)$ existe et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|z-w| < \eta \Longrightarrow \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(w)\right| < \varepsilon$$

ou encore :

$$|z-w| < \eta \Longrightarrow |(f(z)-f(w)) - (z-w)f'(w)| < |z-w|\varepsilon.$$

Comme l'intégrale de toute fonction constante et celle de z sont nulles sur R_n (calcul facile à mener), on a :

$$I(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n} \{(f(z)-f(w)-(z-w)f'(w)\}dz$$

et donc :

$$|I(R_n)| = \left|\int_{\partial R_n} \{(f(z)-f(w)-(z-w)f'(w)\}dz\right| < \varepsilon \int_{\partial R_n} |z-w||dz|$$

lorsque $|z-w| < \eta$. Ici $|dz|$ désigne la variation infinitésimale du module de z. Soient d_n et L_n les mesures respectivement de la diagonale et du périmètre de R_n, d et L celles de R. Alors $|I(R_n)| \leq \frac{\varepsilon dL}{4^n}$ ce qui donne finalement (en utilisant (III.2)) $|I(R)| \leq dL\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, la quantité $I(R)$ doit être nulle. ♢

Les hypothèses peuvent être affaiblies et donner en plus une version un peu plus forte permettant d'établir d'autres résultats importants. On se contentera de son énoncé.

2.2. Théorème de Cauchy 2. *Soit Ω un ouvert obtenu à partir d'un rectangle R (comme dans le théorème 2.1) en lui ôtant un nombre fini de points $z_1, \cdots, z_k$. On suppose que, pour tout $j = 1, \cdots, k$, on a $\lim\limits_{z \to z_j}(z-z_j)f(z) = 0$. Alors :*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Et encore une version un peu plus générale. (Cette fois-ci l'hypothèse est affaiblie en généralisant le chemin sur lequel on intègre.)

2.3. Théorème de Cauchy 3. *Soit f une fonction holomorphe sur un disque sauf en un nombre fini de points (de ce disque) $z_1, \cdots, z_k$. On suppose que, pour tout $j = 1, \cdots, k$, on a $\lim\limits_{z \to z_j}(z-z_j)f(z) = 0$. Alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour toute courbe fermée γ, C^1 par morceaux et ne passant par aucun des points $z_1, \cdots, z_k$.*

La forme la plus générale du théorème de Cauchy est donnée par l'énoncé qui suit. Il est basé essentiellement sur la nature homotopique du chemin sur lequel on intègre.

2.4. Théorème de Cauchy. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U. Alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{III.3}$$

pour tout chemin fermé γ homotope à un point.

On sait, par définition même que, dans un ouvert simplement connexe, tout chemin fermé est homotope à un point. On obtient alors le :

2.5. Corollaire. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe U. Alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

pour tout chemin fermé γ dans U. La fonction f y admet alors une primitive i.e. il existe une fonction holomorphe $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in U$ donnée par :

$$F(z) = \int_\sigma f(\xi)d\xi \tag{III.4}$$

où σ est n'importe quel chemin joignant un point fixé z_0 au point z.

L'hypothèse "U simplement connexe" est substantielle pour la définition de la fonction F par la formule (III.4) car autrement F ne serait qu'une fonction multiforme !

3. Formule de Cauchy

C'est un bijou de la théorie des fonctions holomorphes ! On va voir effectivement que cette formule y joue un rôle central : elle permet, entre autres, de montrer l'analyticité d'une fonction holomorphe et donc des propriétés importantes sur la nature de ses zéros et ses singularités.

3.1. Indice d'un chemin fermé

Nous avons déjà introduit cette notion pour un cercle. Nous allons donner la définition pour n'importe quel chemin fermé.

Soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux dans $\mathbb{C}$ et z_0 in point de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Alors l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ est de la forme $2i\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Quite à découper le chemin γ en plusieurs morceaux, on peut se ramener à la situation où γ est C^1 partout. On a donc un paramétrage continûment différentiable $\gamma : t \in [0,1] \longmapsto \gamma(t) \in \mathbb{C}$. Soit $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt.$$

Elle est de classe C^1 et a pour dérivée $\psi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$. La dérivée de $e^{-\psi(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est alors identiquement nulle ; par suite cette fonction est constante et est donc égale à sa valeur en 0 *i.e.* $e^{-\psi(t)}(\gamma(t) - z_0) = \gamma(0) - z_0$ ou $e^{\psi(t)} = \frac{\gamma(t)-z_0}{\gamma(0)-z_0}$. Comme $\gamma(1) = \gamma(0)$ (le chemin γ étant fermé) $e^{\psi(1)} = 1$ et donc $\psi(1) = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0} dt$ doit être de la forme $2i\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Ce qui démontre l'énoncé. ♢

L'entier :

$$\text{(III.5)} \qquad \mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

est appelé l'*indice* du chemin fermé γ relativement au point z_0. Donnons quelques-unes de ses propriétés.

Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé C^1 par morceaux. Comme l'application γ est continue son image est un compact. Ce compact partage le plan en des ouverts : les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Une et une seule de ces composantes est non bornée ; notons-la Ω_∞.

• On a $\mathrm{Ind}(\gamma^{-1}, z_0) = -\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ où γ^{-1} est l'opposé de γ *i.e.* le chemin défini par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$.

• Comme fonction de z_0, $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ est constant sur chacune des composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Pour $z_0 \in \Omega_\infty$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = 0$.

3.2. Formule intégrale de Cauchy. *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un disque U et $z_0 \in U \setminus \gamma$ où γ est un chemin fermé dans U. Alors :*

$$\text{(III.6)} \qquad \mathrm{Ind}(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Démonstration. Pour $z \in U$ on pose $\Phi(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Cette quantité est définie partout sauf pour $z = z_0$. La fonction Φ est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$ et vérifie :

$$\lim_{z \to z_0} ((z - z_0)\Phi(z)) = \lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0.$$

D'après le Théorème III. 2.3 on a :

$$\int_\gamma \Phi(z) dz = \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

qu'on peut écrire aussi $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz$. Mais $\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = 2i\pi \mathrm{Ind}(\gamma, z_0) f(z_0)$. Ce qui donne :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

qui est la formule qu'on cherche à établir. $\diamondsuit$

La formule de Cauchy habituellement utilisée est celle dans laquelle le chemin γ est d'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = 1$. Et en fait on la voit comme une fonction de $\zeta \in U \setminus \gamma$; dans cette situation elle s'écrit :

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \tag{III.7}$$

L'énoncé 3.2 est donné pour un disque alors qu'en réalité la formule intégrale de Cauchy est valable sur n'importe quel ouvert connexe. Voici la version générale :

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U \setminus \gamma$ où γ est un chemin fermé dans U homotope à un point. Alors :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{III.8}$$

4. Analyticité des fonctions holomorphes

Nous avons déjà vu qu'une fonction analytique sur un ouvert y était holomorphe. L'objet de cette section est de montrer que la réciproque est vraie et de donner quelques propriétés en plus.

4.1. Théorème. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U. Alors elle y est analytique.*

Démonstration. Soient $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans U. Notons γ le cercle de centre z_0 et de rayon r. Alors, pour $z \in D(z_0, r)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad \text{(Formule de Cauchy).} \tag{III.9}$$

De façon évidente, $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ pour tout ξ sur le cercle γ et tout z dans le disque ouvert $D(z_0, r)$. Par suite on a un développement en série convergente :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} \\
&= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\
&= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right) + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n + \cdots \right\}
\end{aligned}$$

En injectant dans (III.9) on obtient :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right) d\xi.$$

Comme on intègre sur le compact γ et que la série y converge uniformément, on peut permuter les signes de sommation et d'intégration pour obtenir :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n$$

qui montre bien que, sur le disque ouvert $D(z_0, r)$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ avec :

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

c'est-à-dire f est analytique. $\diamondsuit$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ est appelée *série de Taylor* de f au voisinage de z_0. Une estimation de la taille des coefficients f_n est décrite par la proposition qui suit.

4.2. Inégalités de Cauchy. *Supposons f holomorphe sur le disque $D(z_0, r)$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $\sup_{z \in D(z_0,r)} |f(z)| \leq M$. Alors les coefficients de sa série de Taylor au voisinage de z_0 vérifient l'inégalité* :

(III.10). $$|f_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Démonstration. On sait, d'après ce qui précède, que le coefficient f_n est donné par la formule intégrale :

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où γ_ρ est le cercle de centre z_0 et de rayon ρ avec $0 < \rho < r$. D'où :

$$\begin{aligned} |f_n| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \cdot |d\xi| \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}} \\ &= \frac{M}{\rho^n}. \end{aligned}$$

En prenant la limite pour ρ tendant vers r on obtient l'inégalité cherchée. $\diamondsuit$.

Un corollaire presque immédiat des inégalités de Cauchy est le :

4.3. Théorème de Liouville. *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (on dit que f est une fonction* **entière***). On suppose que f est bornée i.e. il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors f est constante.*

Démonstration. La fonction f admet au voisinage de 0 un développement de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ convergeant sur tout disque $D(0,r)$. Comme f est bornée par $M > 0$, pour tout $r > 0$ on a $|f_n| \leq \frac{M}{r^n}$ pour tout n. On fait tendre r vers $+\infty$; ce qui nous donne $f_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc f est constante égale à f_0. $\diamondsuit$

Nous terminons cette section par le théorème suivant (que nous ne démontrerons pas).

4.4. Principe du maximum. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante sur un ouvert connexe U. Alors il n'existe aucun point $z_0 \in U$ en lequel le module $|f|$ de f soit maximal. De façon précise, il n'existe pas de point $z_0 \in U$ tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tout $z \in U$.*

Ce théorème admet de façon presque immédiate le corollaire qui suit.

4.5. Corollaire. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante sur un ouvert connexe borné U et continue sur son adhérence $\overline{U}$. Alors $|f|$ ne peut atteindre son maximum que sur le bord $\partial U = \overline{U} \setminus U$ de U.*

On peut dire aussi que si $|f|$ atteint son maximum sur U alors f est constante.

Et finalement :

4.6. Lemme de Schwarz. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur le disque unité ouvert U et telle que $|f| < 1$ et $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(z)| = |z|$ pour un certain $z \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Démonstration. On applique le principe du maximum à la fonction $h(z) = \frac{f(z)}{z}$ pour $z \neq 0$ et $h(0) = f'(0)$. Sur tout cercle γ_r centré en 0 et de rayon $0 < r < 1$, son module est $\leq \frac{1}{r}$ et donc $|h(z)| \leq \frac{1}{r}$ pour $|z| \leq r$. On fait tendre r vers 1 et on obtient $|h(z)| \leq 1$, c'est-à-dire $|f(z)| \leq |z|$ pour tout z. Si l'égalité $|f(z)| = |z|$ est atteinte en un point $z \in U$ ou si $|f'(0)| = 1$, $|h|$ atteint son maximum sur l'ouvert U et donc h est constante ; par suite il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = e^{i\theta}$ *i.e.* $f(z) = e^{i\theta} z$. $\diamondsuit$

Ce lemme est utilisé de manière substantielle dans la détermination explicite des biholomorphismes du disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Nous verrons cela en exercice (*cf.* Exercice 21).

CHAPITRE IV

SÉRIES DE LAURENT, SINGULARITÉS ET RÉSIDUS

1. Série de Laurent

Nous commencerons par donner la définition générale d'une telle série. Ensuite nous verrons dans quelles conditions une fonction analytique en admet une et comment la déterminer.

La proposition qui suit est immédiate à démontrer.

1.1. Proposition. *Considérons la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ *et* $\ell = \lim\sup_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}}$. *Alors :*

i) *Si* $\ell = 0$ *la série converge absolument pour tout* z *sauf au point* $z = z_0$.
ii) *Si* $0 < \ell < +\infty$ *la série converge pour* $|z-z_0| > \ell$ *et diverge pour* $|z-z_0| < \ell$.
iii) *Si* $\ell = +\infty$ *la série diverge pour tout* z.

Si $0 \leq \ell < +\infty$, la série est uniformément convergente sur tout disque fermé contenu dans l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > \ell\}$. Elle définit donc une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω.

On appelle *série de Laurent* une série du type $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ qui s'interpète comme la somme des deux séries :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^{-m}}. \tag{IV.1}$$

Elle est convergente si, et seulement si, les deux séries (IV.1) le sont. La première, appelée *partie régulière* est une série de Taylor ayant un rayon de convergence R. La deuxième est appelée *partie principale* et converge pour $|z-z_0| > r$. La série de Laurent converge alors uniformément sur tout compact contenu dans la *couronne* :

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$$

lorsque évidemment $r < R$. La somme y définit alors une fonction holomorphe :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Pour $|z-z_0| > R$ ou $|z-z_0| < r$ l'une des deux séries au moins diverge et donc la série de Laurent diverge aussi.

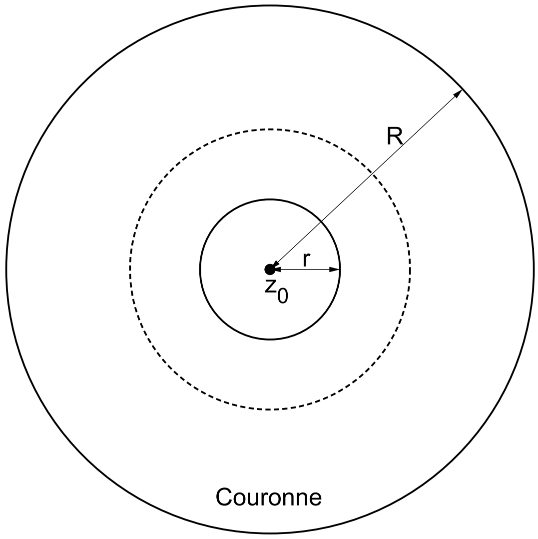
1.2. Proposition. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur une couronne (ouverte) $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Alors f y admet un développement de Laurent :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$$

avec :

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \tag{IV.2}$$

où γ_ρ est le cercle centré en z_0 et de rayon ρ avec $r < \rho < R$.



La démonstration est laissée au lecteur : à peu de choses près, elle est similaire à celle du théorème III.4.1.

1.3. Exemple

On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$. Elle est définie et holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Cherchons son développement de Laurent au voisinage de chacun des points $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$. On a :

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{pour} \quad 0 < |z| < 1$$

et :

$$f(z) = \frac{1}{1+(z-1)} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \text{pour} \quad 0 < |z-1| < 1.$$

2. Singularités

Soient z_0 un point de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de z_0 sauf peut-être en z_0. On dira alors que z_0 est un *point singulier isolé* de f. Pour r suffisamment petit, f admet un développement de Laurent sur la couronne $0 < |z - z_0| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n (z - z_0)^n. \tag{IV.3}$$

Il y a trois possibiltés :

• Les coefficients f_n sont nuls pour $n < 0$. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité apparente.*

• Il n'y a qu'un nombre fini de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est un *pôle* de f. Le plus grand $n \geq 1$ tel que $f_{-n} \neq 0$ est un entier naturel m appelé *ordre* du pôle z_0. Si $m = 1$ on dira que z_0 est un *pôle simple* de f.

• Il y a une infinité de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité essentielle.*

2.1. Singularité apparente

Si z_0 est une singularité apparente de f, la série donnée par (IV.3) est en fait une série de Taylor ordinaire dont la somme $h(z)$ est holomorphe sur tout le disque $|z - z_0| < r$. On prolonge donc f en z_0 en posant $f(z_0) = h(z_0)$. Donc la fonction f, a priori définie uniquement sur le disque épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, est en réalité définie sur tout le disque ; c'est en ce sens qu'on dit que la “singularité z_0 est apparente”. Un exemple simple est celui de la fonction $f(z) = \frac{sin(z)}{z}$ définie a priori sur $\mathbb{C}^*$ et qui se prolonge en 0 par $f(0) = 1$.

2.2. Pôle

Comme on l'a dit, si z_0 est un pôle, la série (IV.3) ne contient qu'un nombre fini de termes $(z - z_0)^n$ avec exposant négatif. Soit m l'ordre de ce pôle. On a :

$$f(z) = \frac{f_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$$

avec $f_{-m} \neq 0$. En multipliant les deux membre par $(z - z_0)^m$ on obtient :

$$(z - z_0)^m f(z) = f_{-m} + f_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + f_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^{n+m}.$$

On voit donc que z_0 est une singularité apparente de la fonction $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ et que $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = f_{-m}$ et par suite :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f_{-m}}{(z - z_0)^m} = \infty$$

ce qui signifie que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers z_0. Les assertions qui suivent ne sont pas difficiles à étabir.

i) *Si f est holomorphe sur un disque $D(z_0, r)$ avec z_0 comme seul zéro de multiplicité m, la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$ sauf en z_0 qui est un pôle d'ordre m.*

ii) *Si f est holomorphe sur un disque $D(z_0, r)$ sauf en z_0 qui est un pôle isolé d'ordre m, la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$ avec z_0 comme zéro de multiplicité m.*

Définition. *Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite* ***méromorphe*** *s'il existe un ensemble discret Σ de U tel que f est holomorphe sur $U \setminus \Sigma$ et tout point de Σ est un pôle de f.*

Par exemple, si f et g sont deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ le quotient $\frac{f}{g}$ est une fonction méromorphe ; ses pôles sont les zéros de g.

Il n'y a aucune restriction sur les pôles comme le décrit le *Théorème de Mittag-Leffler* qui a marqué un pas décisif dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Théorème de Mittag-Leffler. *Soit $(z_k)_{k\geq 1}$ une suite discrète dans $\mathbb{C}$ et $(m_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers naturels. Alors il existe une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant $z_1, \cdots, z_k, \cdots$ comme pôles d'ordres respectifs $m_1, \cdots, m_k, \cdots$.*

On peut donc prescrire à l'avance les pôles et leurs multiplicités respectives !

2.3. Singularité essentielle

D'abord, les fonctions ayant de telles singularités existent bien. Par exemple la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ a pour développement de Laurent :

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots$$

qui montre bien que $z_0 = 0$ est un point singulier essentiel de f.

L'importance de la notion est par exemple illustrée par les deux théorèmes qui suivent qui montrent à quel point l'image par la fonction d'un voisinage arbitraire d'une singularité essentielle peut remplir l'espace $\mathbb{C}$.

Théorème de Weierstrass. *Soit z_0 un point singulier essentiel isolé d'une fonction f holomorphe sur un disque ouvert épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'image par f du disque épointé $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

À titre d'exercice, le lecteur pourrait s'amuser à vérifier ce théorème sur la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en se donnant $w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ et en cherchant une suite explicite z_n dans $D(0, \varepsilon)$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

Encore plus fort est le :

Théorème de Picard. *Soit z_0 un point singulier essentiel isolé d'une fonction f holomorphe sur un disque ouvert épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'image par f du disque épointé $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ est $\mathbb{C}$ tout entier ou $\mathbb{C}$ privé d'un point.*

3. Résidus

C'est une notion importante. Nous allons l'introduire, avec quelques-unes de ses applications et notamment montrer comment on l'utilise pour le calcul effectif de certaines intégrales de fonctions d'une variable réelle.

Soit f une fonction holomorphe sur une couronne $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ayant z_0 comme singularité (apparente, pôle ou essentielle). Soient ρ tel que $0 < \rho < r$ et γ_ρ le cercle de centre z_0 et de rayon ρ. Alors f se développe en série de Laurent sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$:

$$f(z) = \cdots + \frac{f_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{z-z_0} + f_0 + f_1(z-z_0) + \cdots + f_n(z-z_0)^n + \cdots$$

Comme cette série converge uniformément sur le compact γ_ρ (image du chemin γ), on peut intégrer terme à terme sur γ_ρ et on obtient :

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \int_{\gamma_\rho} (z-z_0)^n dz.$$

Un calcul simple (qu'on a déjà fait) montre que tous les termes de cette série d'intégrales sont nuls sauf $\int_{\gamma_\rho} \frac{f_{-1}dz}{z-z_0} = 2i\pi f_{-1}$. Donc :

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = 2i\pi f_{-1}.$$

3.1. Définition. *On appelle **résidu** de f au point z_0 et on note* $\text{Rés}(f, z_0)$ *le coefficient f_{-1} du développement de Laurent de f au point z_0.*

Nous sommes en mesure maintenant de donner le théorème des résidus. C'est ce qui reste comme souvenir à toute personne ayant suivi un cours de variable complexe.

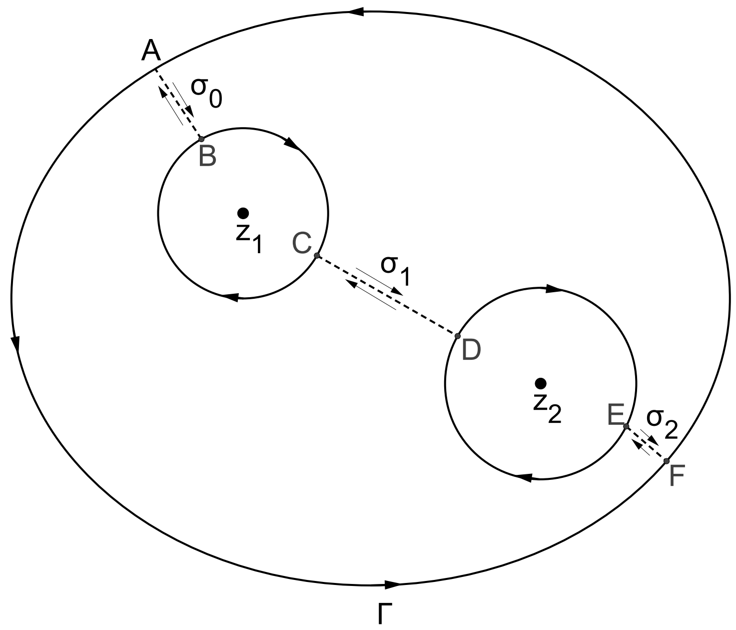
3.2. Théorème des résidus. *Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de l'adhérence $\overline{\Omega}$ de l'ouvert borné Ω délimité par un chemin fermé Γ simple (sans auto-intersection) et C^1 par morceaux sauf en un nombre fini de points $z_1, \cdots, z_k$. Alors :*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{k} \text{Rés}(f, z_j). \tag{IV.4}$$

Démonstration. Soient $r > 0$ et, pour chaque $j = 1, \cdots, k$, soit γ_j le cercle de centre z_j et de rayon r ; on choisit r suffisamment petit pour que tous les cercles γ_j soient contenus dans Ω et que deux quelconques d'entre eux ne se coupent pas. Soient σ_0 un chemin simple dans $\overline{\Omega}$ joignant un point de Γ à un point de γ_1, σ_1 un chemin simple dans Ω joignant un point de γ_1 à un point de $\gamma_2, \cdots$, σ_{k-1} un chemin simple dans Ω joignant un point de γ_{k-1}

à un point de γ_k et σ_k un chemin simple dans Ω joignant un point de γ_k à un point de Γ. Le dessin qui suit visualise la situation lorsque $k = 2$.

On note K le compact obtenu en ôtant de $\overline{\Omega}$ les intérieurs des disques délimités par les cercles $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$. On oriente alors les chemins $\Gamma, \gamma_1, \cdots, \gamma_k$ de telle sorte que lorsqu'on se déplace sur chacun d'eux le compact K se retrouve à notre gauche. (On peut sûrement mieux faire en ayant recours à une définition plus formelle et plus "mathématique" mais cette convention nous suffit largement !)



On décompose alors $\Lambda = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k$ en deux chemins fermés simples et C^1 par morceaux Γ_1 et Γ_2. Expliquons comment on fait dans le cas $k = 2$ en se référant au dessin. On convient que l'orientation positive sur le chemin σ_0 est de A vers B, sur σ_1 de C vers D et sur σ_2 de E vers F.

Pour obtenir Γ_1 :

– on part du point A,

– on va vers B en parcourant σ_0 (décrit dans le sens positif),

– de B vers C sur γ_1,

– de C vers D sur σ_1 (décrit dans le sens positif),

– de D vers E sur γ_2,

– de E vers F sur σ_2 (décrit dans le sens positif) et enfin

– de F vers A sur Γ.

Pour obtenir Γ_2 :

– on part du point A,

– on va vers F en parcourant Γ,
– de F vers E sur σ_2^{-1} (σ_2 décrit dans le sens négatif),
– de E vers D sur γ_2,
– de D vers C sur σ_1^{-1} (σ_1 décrit dans le sens négatif),
– de C vers B sur γ_1 et enfin
– de B vers A sur σ_0^{-1} (σ_0 décrit dans le sens négatif).

Pour chaque $\ell = 0, 1, \cdots, k$ on a $\int_{\sigma_\ell^{-1}} f(z)dz = -\int_{\sigma_\ell} f(z)dz$. D'autre part la fonction f étant holomorphe à l'intérieur de chacun des domaines délimités par Γ_1 et Γ_2, par le théorème de Cauchy on a :

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0.$$

Par suite :

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Mais l'intégrale $\int_{\gamma_j} f(z)dz$ vaut $2i\pi \text{Rés}(f, z_j)$. On a donc :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{k} \text{Rés}(f, z_j).$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. ♢

4. Calcul d'intégrales

Le théorème des résidus admet de multiples applications. L'une des plus connues est celle qui l'utilise pour calculer explicitement certaines intégrales de fonctions d'une variable réelle comme nous l'avons déjà dit. Nous nous limiterons à traiter deux exemples en détail. Mais avant, donnons quelques indications pour calculer le résidu en un pôle.

4.1. Soit z_0 un pôle d'ordre m d'une fonction f. Alors au voisinage de ce point on a le développement de Laurent :

$$f(z) = \frac{f_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{z-z_0} + f_0 + f_1(z-z_0) + \cdots + f_n(z-z_0)^n + \cdots$$

et donc :

$$(z-z_0)^m f(z) = f_{-m} + f_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + f_{-1}(z-z_0)^{m-1} + f_0(z-z_0)^m + f_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots$$

On dérive les deux membres $(m-1)$ fois et on obtient :

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = (m-1)! f_{-1} + \frac{m!}{1!} f_0(z-z_0) + \frac{(m+1)!}{2!} f_1(z-z_0)^2 + \cdots$$

On prend la limite des deux membres lorsque z tend vers z_0 et on obtient :

$$\text{(IV.5)} \qquad \text{Rés}(f, z_0) = f_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z)\right).$$

Lorsque le pôle z_0 est simple *i.e.* $m = 1$, on a au voisinage de z_0 (en dehors de z_0 bien sûr) :

$$f(z) = \frac{f_{-1}}{(z - z_0)} + f_0 + f_1(z - z_0) + \cdots$$

D'où :

$$(z - z_0)f(z) = f_{-1} + f_0(z - z_0) + f_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Par suite :

$$\text{(IV.6)} \qquad \text{Rés}(f, z_0) = f_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z).$$

Ceci devient encore plus simple si $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$ avec $b(z_0) = 0$, $a(z_0) \neq 0$ et $b'(z_0) \neq 0$. On trouve (le lecteur fera les calculs) :

$$\text{(IV.7)} \qquad \text{Rés}(f, z_0) = f_{-1} = \frac{a(z_0)}{b'(z_0)}.$$

4.2. Premier exemple

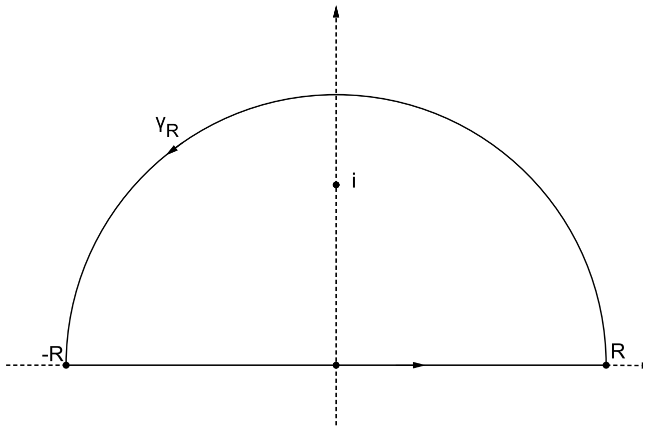
Soit à calculer l'intgrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. Le fait qu'elle existe effectivement est un exercice facile laissé au soin du lecteur !

Considérons la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. Elle est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Les points $-i$ et i sont des pôles d'ordre 3. (On n'utilisera en fait que le pôle $z_0 = i$.) En utilisant la formule (IV.5) on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, i) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - i)^3 f(z)\right) \\ &= \frac{1}{2} \Big[\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z+i)^3} \right) \Big]_{z=i} \\ &= -\frac{3i}{16}. \end{aligned}$$

Le chemin fermé Γ auquel on va appliquer le théorème des résidus sera le suivant. Soit $R > 1$; on part du point de coordonnées $(-R, 0)$ et on parcourt l'axe réel jusqu'au point de coordonnées $(R, 0)$ ensuite on décrit le demi-cercle γ_r de rayon R dans le demi-plan supérieur pour revenir au point $(-R, 0)$. L'intérieur du chemin est un ouvert qui contient le pôle i. D'après le théorème des résidus on a :

$$\text{(IV.8)} \qquad \int_\Gamma f(z) = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \text{Rés}(f, i) = \frac{3\pi}{8}.$$



Mais sur le cercle γ_R on a :

$$\frac{1}{|z^2+1|} = \frac{1}{|z^2-(-1)|} \leq \frac{1}{||z^2|-1|} = \frac{1}{R^2-1}.$$

D'où :

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^3}$$

et donc :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

D'après (IV.8) en prenant la limite pour R tendant vers l'infini, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

4.3. Deuxième exemple

L'intégrale $J = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}$ existe bien. Calculons-la en utilisant le théorème des résidus. Comme la fonction à intégrer est paire, son intégrale est égale à la moitié de l'intégrale $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}$. On considère la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$. Elle est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et les points $-i$ et i en sont des pôles simples. La fonction f est de la forme $\frac{a(z)}{b(z)}$ avec $a(i) = e^{-1} \neq 0$ et $b'(i) = 2i \neq 0$; en vertu de la formule (IV.7) On a :

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{a(i)}{b'(i)} = \frac{1}{2ie}.$$

On reprend le chemin Γ de l'exemple qui précède. En appliquant le théorème des résidus on obtient :

$$\int_\Gamma f(z) = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi\text{Rés}(f,i) = \frac{\pi}{e}$$

c'est-à-dire :

(IV.9)
$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}dx + \Re\left(\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz\right) = \frac{\pi}{e}.$$

Sur le cercle γ_R on a $|e^{iz}| \leq e^{-y}$ où y est la partie réelle de z. D'où :

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}$$

qui montre bien que l'intégrale $\int_{\gamma_R} f(z)dz$ tend vers 0 lorsque R tends vers $+\infty$. L'égalité (IV.9) nous donne alors :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e}.$$

EXERCICES

Exercice 1

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On appelle *rayon de convergence* de f le plus grand $R > 0$ tel que, pour $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$. Donner le rayon de convergence de chacune des séries suivantes.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{2n+1} \text{ avec } a \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n.$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$e^z = 3, \qquad e^z = -2, \qquad e^z = i, \qquad \sin z = 0, \qquad \mathrm{sh} z = 0, \qquad e^{\frac{z}{1+z}} = 1 - i.$$

Exercice 3

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même. Mais c'est aussi un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ; les nombres complexes 1 et i en forment une base : tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$; ce qui donne donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

1 - Une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bien sûr $\mathbb{R}$-linéaire. Mais quelles conditions doit vérifier une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ pour qu'elle soit $\mathbb{C}$-linéaire ?

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ de son produit hermitien $(z, z') \in \mathbb{C}^2 \longmapsto z\overline{z'} \in \mathbb{C}$.

2 - Donner l'équation du cercle (Γ) de centre $z_0 = 2 + i$ et de rayon 2. Le dessiner dans le plan complexe.

3 - Pour tout nombre complexe z, on désigne par $\Re z$ et $\Im z$ respectivement sa partie réelle et sa partie imaginaire. On note $\mathbb{H}$ le demi-espace $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. Dessiner et colorer (en rouge) la région complexe (Δ) de $\mathbb{H}$ définie comme suit.

$$(\Delta) = \left\{ z \in \mathbb{H} : |\Re z| < \frac{1}{2} \ \text{ et } |z| > 1 \right\}.$$

4 - Quelle est l'image (Δ') de (Δ) par l'application $\Phi : z \in \mathbb{H} \longmapsto -\frac{1}{z} \in \mathbb{H}$? Dessiner cette région (Δ') et la colorer (en jaune).

Exercice 4

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On notera R son rayon de convergence qu'on supposera non nul. Sur le cercle $|z| = R$, on ne sait pas en général ce qui se passe : la série peut converger en certains points et diverger en d'autres. Dans certaines situations on sait donner des réponses.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ converge pour tout $z \neq 1$ avec $|z| = 1$. (Utiliser le critère de convergence d'Abel.)

Exercice 5

Soit p un nombre entier naturel non nul. Considérons la série entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{np}$.

1 - Montrer que son rayon de convergence est égal à 1.

2 - En quels points du cercle $|z| = 1$ la série f converge-t-elle ?

Exercice 6

Soient p un entier naturel non nul et $z_1, \cdots, z_p$ des points sur le cercle (Γ) d'équation $|z| = 1$. Donner un exemple de série entière ayant 1 comme rayon de convergence, divergente sur l'ensemble $\{z_1, \cdots, z_p\}$ et convergente en tout autre point de (Γ).

Exercice 7

Trouver les transformées des figures suivantes par l'application qui au point $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ associe le point $w = \frac{1}{z} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1 - Le cercle $|z - 1| = 1$.
2 - Le cercle $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$.
3 - Le cercle $|z| = r$.
4 - La droite $\Re z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
5 - La famille de toutes les droites parallèles à la première bissectrice.
6 - La famille de toutes les droites passant par un point $z_0 \neq 0$.
7 - Le triangle de sommets les points $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et $z_2 = i$.

Exercice 8

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les 5 premiers termes de son développement en série entière au voisinage de l'origine.

$$f(z) = e^{\frac{z}{1-z}} \qquad g(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right) \qquad h(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

$$k(z) = \log(1+e^z) \qquad \ell(z) = (\cos z)^{\frac{1}{2}} \qquad m(z) = \frac{e^z}{e^z+1}.$$

Exercice 9

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout $x_0 \in I$, il existe $r > 0$ tel que l'intervalle ouvert $I_r =]x_0 - r, x_0 + r[$ soit contenu dans I et pour tout $x \in I_r$ on ait un développement en série $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

1 - Montrer que toute fonction polynôme $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ est analytique sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2 - Montrer que toute fonction analytique $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞.

3 - Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe C^∞ mais qu'elle n'est pas analytique.

Exercice 10

Une courbe différentiable $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ (I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$ est dite *régulière* au point $\gamma(t_0)$ si son vecteur dérivé $\gamma'(t_0)$ est non nul.

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Soient z_0 un point de U, $\varepsilon > 0$ et $\gamma_1, \gamma_2 :]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow U$ deux courbes différentiables, régulières au point z_0 et telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. On pose $\sigma_1 = f \circ \gamma_1$ et $\sigma_2 = f \circ \gamma_2$. Alors σ_1 et σ_2 sont des courbes différentiables dans $\mathbb{C}$.

1 - On suppose f holomorphe au voisinage de z_0 et telle que $f'(z_0) \neq 0$. Montrer alors que les angles orientés $(\overrightarrow{\gamma_1'(t_0)}, \overrightarrow{\gamma_2'(t_0)})$ et $(\overrightarrow{\sigma_1'(t_0)}, \overrightarrow{\sigma_2'(t_0)})$ sont égaux.

On voit donc qu'une application holomorphe préserve les angles orientés. Une application différentiable qui préserve les angles est dite *conforme*.

2 - Montrer que toute application différentiable $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ qui préserve les angles orientés est holomorphe. Donner un exemple où on voit que la seule condition "préseve les angles" (mais pas leur orientation) n'est pas suffisante.

Exercice 11

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 donnée par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On rappelle que l'*intégrale* de f le long de γ est le nombre complexe

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \{f(\gamma(t))\,(x'(t) + iy'(t))\}\,dt.$$

Soit γ un cercle quelconque de centre z_0 et de rayon $\rho > 0$. Calculer cette intégrale pour les fonctions f suivantes :

(i) - f est un polynôme $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$;

(ii) - $f(z) = \frac{1}{z}$. (Cette situation nécessite une discussion suivant la position de la courbe γ par rapport à l'origine 0.)

Exercice 12

1 - Montrer que toute fonction polynôme $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ est holomorphe sur le plan complexe tout entier.

2 - Dire pourquoi les fonctions $\varphi, \psi : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ définies respectivement par $\varphi(z) = \overline{z} = x - iy$ et $\psi(z) = z\overline{z} = x^2 + y^2$ ne sont pas holomorphes mais qu'elles sont analytiques en x et y.

3 - Soit $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $\phi(x + iy) = (ax + by) + i(cx + dy)$ où a, b, c, et d sont des constantes réelles. Quelles conditions doivent satisfaire a, b, c, et d pour que ϕ soit holomorphe ?

4 - On note $\mathbb{H}$ le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ et $\mathbb{D}$ le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Montrer que l'application $\rho : z \in \mathbb{H} \longmapsto \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{C}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$.

5 - Donner explicitement la bijection inverse ρ^{-1} de ρ et montrer qu'elle est aussi holomorphe.

Exercice 13

On note z_0 et z_1 respectivement les points 0 et $1 + i$. Soit γ une courbe d'origine z_0 et d'extrémité z_1. Calculer la valeur de l'intégrale $\int_\gamma (1 + i - 2\overline{z})dz$ lorsque γ est :

a) le segment qui joint z_0 et z_1 ;

b) la portion de parabole d'équation $y = x^2$ qui joint z_0 et z_1 ;

c) la ligne polygonale $z_0 w z_1$ où $w = 1$.

Exercice 14

Soient f la fonction $f(z) = z^2 + |z|^2$ et γ le demi-cercle $\{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Calculer l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$.

Exercice 15

On prend la branche de $\sqrt{z}$ pour laquelle $\sqrt{1} = -1$. Soient g la fonction $g(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ et γ le demi-cercle $\{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Calculer l'intégrale $\int_\gamma g(z)dz$.

Exercice 16

Soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Rappellons d'abord les résultats importants qui suivent.

i) *Soit* $\sigma : [0,1] \longrightarrow U$ *une courbe fermée* C^1 *par morceaux. Alors l'intégrale* $\int_\sigma f(z)dz$ *est nulle.*

ii) *Soient* z_0 *et* z_1 *deux points de* U *et* γ *une courbe simple* C^1 *par morceaux d'origine* z_0 *et d'extrémité* z_1. *Alors l'intégrale* $\int_\gamma f(z)dz$ *est indépendante de* γ *; elle sera donc notée* $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$.

iii) *Soit* $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *une primitive de* f *(qui existe toujours car* U *est simplement connexe). On a la formule de Newton-Leibniz :*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

En utilisant la formule de Newton-Leibniz (qu'on vient de donner), Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz \qquad \text{et} \qquad \int_0^i z\cos z dz.$$

Exercice 17

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On dira que U est une *couronne* (centrée en z_0) s'il existe des réels r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 < r_2$ et $U = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

1 - Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que f est analytique sur U *i.e.* pour tout $z_0 \in U$, il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $z \in D(z_0, \rho)$ (disque ouvert de centre z_0 et de rayon ρ), on ait :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$$

où les f_n sont des nombres complexes qu'on déterminera.

2 - Supposons maintenant que U est une couronne $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Montrer que, pour tout point $z \in U$, $f(z)$ s'écrit :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n (z - z_0)^n$$

où les f_n sont des nombres complexes indépendants de z et qu'on déterminera.

Exercice 18

Soient a et c deux réels strictement positifs tels que $a > c$ et F et F' deux points du plan complexe ayant pour affixes respectifs c et $-c$. On appelle *ellipse* de *foyers* F et F' et de *paramètre* a l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$.

1 - Soit $b \in]0, +\infty[$ tel que $a^2 = b^2 + c^2$. Montrer que $(\mathcal{E})$ est une courbe fermée ayant pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2 - Montrer que $(\mathcal{E})$ est l'image de $[0, 2\pi]$ par l'application $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à t associe le point d'affixe $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$.

3 - Soit (Γ) le cercle unité, image de $[0, 2\pi]$ par l'application $\sigma : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{it} \in \mathbb{C}$. Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ et $\int_\sigma \frac{dz}{z}$ et en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a\cos t)^2 + (b\sin t)^2}.$$

Exercice 19

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ un chemin fermé. On rappelle que l'*indice* de γ par rapport au point a est le nombre entier :

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $e^{f(t)} = \gamma(t) - a$; on a alors :

$$I(\gamma, a) = \frac{f(1) - f(0)}{2i\pi}.$$

Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins fermés dans $\mathbb{C}^*$. Pour tout $\in [0, 1]$, on pose $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$; on définit ainsi un chemin fermé $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ qu'on appelle *produit* de γ_1 et γ_2.

1 - Soient $R > 0$ et f une application continue disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ et γ sa restriction au cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Soit a un point qui n'est pas sur l'image de γ et tel que $I(\gamma, a) \neq 0$. Montrer que f prend au moins une fois la valeur a sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$

2 - Montrer que $I(\gamma, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$.

3 - Soient $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ et $\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tels que $|\gamma_1(t)| < |\gamma(t)|$ pour tout $t \in [0, 1]$. Montrer que le chemin $\gamma + \gamma_1$ ne prend jamais la valeur 0 et qu'on a $I(\gamma + \gamma_1, 0) = I(\gamma, 0)$.

Exercice 20

Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Soient $R > 0$ et γ le chemin dans $\mathbb{C}$, image du cercle $\mathcal{C}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ par l'application continue $z \in \mathcal{C}_R \longmapsto P(z) \in \mathbb{C}$.

1 - Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|z| \geq \alpha$, on ait :

$$|z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|.$$

2 - Montrer que, pour $R \geq \alpha$, γ ne passe pas par l'origine.

3 - Montrer que, pour $R \geq \alpha$, $I(\gamma, 0) = n$.

4 - En déduire qu'il existe au moins $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$ *i.e.* le polynôme P admet au moins une racine (*théorème de d'Alembert*).

Exercice 21

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une application $f : U \longrightarrow U$ bijective et telle que f et f^{-1} soient holomorphes est appelée *biholomorphisme* ou *automorphisme* de U. Muni de la composition des applications, l'ensemble $\mathrm{Aut}(U)$ des automorphismes de U est un groupe. L'objet de cet exercice est de donner une description explicite des éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ où $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Pour tout $a \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on note φ_a et R_θ les applications de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \qquad \text{et} \qquad R_\theta(z) = e^{i\theta} z.$$

1 - Montrer que φ_a et R_θ sont des automorphismes de $\mathbb{D}$ *i.e.* des éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. On pose $f(0) = b$ et $g = \varphi_b \circ f$.

2 - Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{D}$ et qu'il fixe 0.

3 - Montrer, en appliquant le théorème de Schwarz (*cf.* III.4.6) à g et à g^{-1}, que $|g'(0)| = 1$.

4 - En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $f = \varphi_a \circ R_\theta$.

Exercice 22

1 - Trouver les zéros des fonctions qui suivent et leurs multiplicités respectives.

$$f(z) = 1 + \cos z, \qquad g(z) = 1 - e^z, \quad h(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} \quad \text{et} \quad k(z) = (z^2 + 1)\text{sh } z.$$

2 - Déterminer le caractère des points singuliers des fonctions suivantes.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad g(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$$

et :

$$h(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}, \quad k(z) = (z - 1)e^{\frac{1}{z-1}}.$$

Exercice 23

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser ses points singuliers et leur nature. Déterminer les résidus de ces fonctions en ces points.

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2}, \qquad g(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}, \qquad h(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

$$k(z) = \frac{\sin 3z - 3\sin z}{(\sin z - z)\sin z}, \qquad \ell(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}, \qquad m(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}.$$

Exercice 24

Calculer, en utilisant le théorème des résidus, la valeur de chacune des intégrales suivantes.

a) $\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2+z}dz$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 4.

b) $\int_\gamma \mathrm{tg}(z)dz$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

c) $\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$ où γ est le cercle de centre i et de rayon $\frac{3}{2}$.

d) En faisant intervenir le résidu à l'infini, calculer la valeur de l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1}$ où γ est le cercle de centre l'origine et de rayon 2.

Exercice 25

En utilisant le théorème des résidus, calculer les valeurs des intégrales :

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx, \quad a > 0$$

et

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^2+k^2}dx, \quad a > 0 \text{ et } k > 0.$$

Exercice 26

1 - Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2 - En utilisant la question qui précède, calculer les intégrales suivantes dites *intégrales de Fresnel* :

$$I_1 = \int_0^\infty \cos x^2 dx \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

Exercice 27

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. Caluler l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx.$$

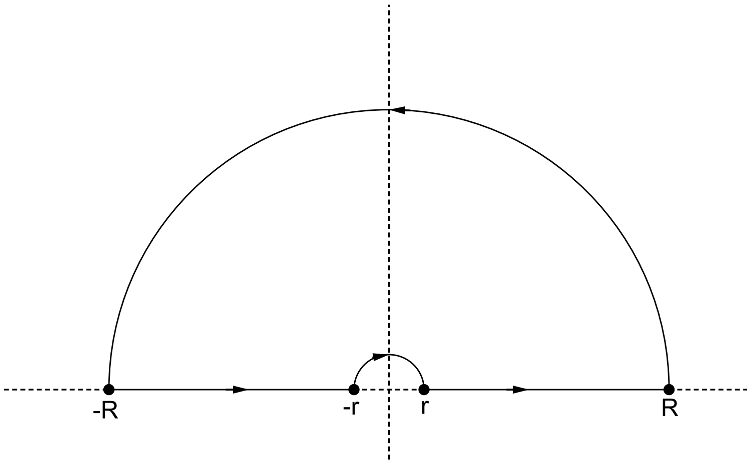
Exercice 28

Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

1 - Montrer que ϕ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue mais que l'intégrale (de Riemann) $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx$ est convergente.

2 - En intégrant une fonction adéquate f (d'une variable complexe) sur le contour qui suit, calculer l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$



Exercice 29

La formule qui suit est intéressante dans les calculs de sommes de séries :

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \cdots, z_k\}$ où $z_1, \cdots, z_k$ sont des complexes qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|z^2 f(z)| \leq C$ pour $|z|$ assez grand. Alors :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{k} \text{Rés } (f(z)\text{cotg } (\pi z), z_j).$$

Soit a un nombre réel non nul. Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$