JP Journal of Geometry and Topology
Vol. 4 N^o 3, (2004), 225-242

Remarques sur certains groupes d'homéomorphismes d'espaces métriques

par

Aziz El Kacimi, Hawete Hattab & Ezzeddine Salhi

Soit G est un groupe dénombrable d'homéomorphismes d'un espace métrique E. Les propriétés qui suivent sont connues.

(1) Si E est une variété différentiable et si toutes les orbites de l'action sont finies, Eipstein a montré que le groupe G est fini [Eps].

(2) Si G est de type fini et s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que toute orbite a un cardinal borné par k alors l'espace des orbites est séparé.

Les exemples qui suivent montrent que l'hypothèse "être de type fini" dans la propriété (2) (*cf.* exemple 1.1) ainsi que l'hypothèse "le cardinal des orbites est uniformément borné" (*cf.* exemple 1.2) sont substantielles. Dans ces deux exemples E et un espace métrique compact connexe par arcs et non localement connexe par arcs. Dans les exemples 1.1 et 1.2 l'espace E est un sous-espace métrique respectivement de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$. Ils donnent un homéomorphisme d'un sous-espace métrique compact connexe par arcs de $\mathbb{R}^3$ ayant toutes ses orbites finies uniformément bornées et tel que l'espace des orbites est séparé (*cf.* l'exemple 1.3 où E est localement connexe par arcs et l'exemple 1.4 où E est non localement connexe par arcs).

Dans la partie 2, nous démontrons quelques propriétés qualitatives des groupes d'homéomorphismes équicontinus et des groupes d'isométries d'un espace métrique et nous vérifions, sur des exemples, que ces propriétés ne se généralisent pas.

La partie 3 étudie l'homotopie du groupe $\mathrm{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ des homéomorphismes du cercle $\mathbb{S}^1$ qui préservent l'orientation. On y donne une nouvelle démonstration élémentaire du fait que $\mathrm{Homéo}_+\mathbb{S}^1$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^1$.

1. Les exemples

1.1. On va construire un groupe G d'homéomorphismes d'un sous-espace métrique de $\mathbb{R}^2$ compact, connexe par arcs et non localement connexe par arcs tel que toute orbite soit de cardinal inférieur ou égal à deux mais tel que l'espace des orbites E/G est non séparé.

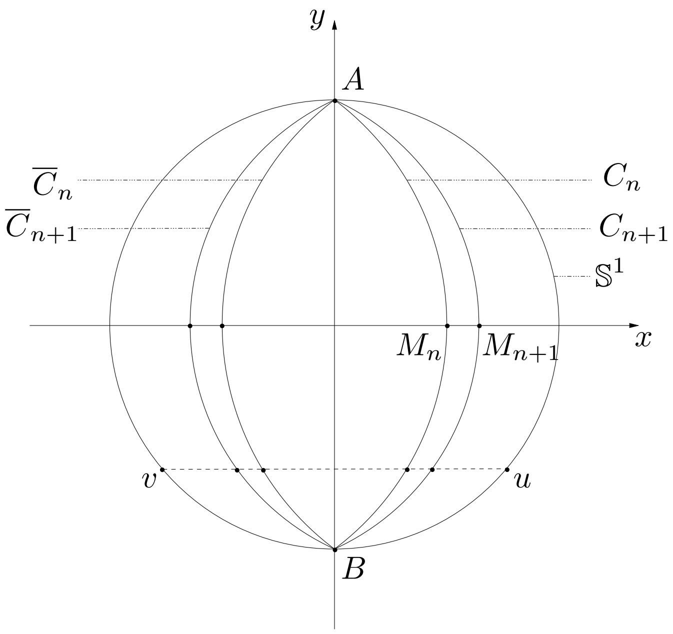

Fig. 1

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A(0,1)$, $B(0,-1)$ et $M_n\left(1-\frac{1}{n+2},0\right)$, où n est un entier naturel. On désigne par C_n l'arc de cercle d'extrémités les points A et B et passant par M_n ; $\overline{C}_n$ sera le symétrique de C_n par rapport à l'axe des y. Soit :

$$E = \mathbb{S}^1 \bigcup \left\{ \bigcup_{n\geq 0} (C_n \cup \overline{C}_n) \right\}$$

la réunion des courbes $C_n \cup \overline{C}_n$ et du cercle $\mathbb{S}^1$. L'espace E est un sous-espace métrique de $\mathbb{R}^2$ compact et connexe par arcs. Il n'est pas localement connexe par arcs.

Soit $s_n : C_n \cup \overline{C}_n \to C_n \cup \overline{C}_n$ la symétrie orthogonale définie par: $s_n(x,y) = (-x,y)$. On définit l'application $f_n : E \to E$ par : $f_n = \begin{cases} s_n & \text{sur } C_n \cup \overline{C}_n \\ \text{id} & \text{ailleurs.} \end{cases}$ Cette application f_n est continue. En effet, soient (x,y) un point de $\mathbb{S}^1$ et $((x_p,y_p))_p$ une suite de E convergeant vers (x,y). Pour p assez grand, $(x_p,y_p) \notin C_n \cup \overline{C}_n$; d'où $f_n(x_p,y_p) = (x_p,y_p)$; la suite $(f_n(x_p,y_p))_p$ converge donc vers $(x,y) = f_n(x,y)$; ce qui montre que f_n est continue en tout point de $\mathbb{S}^1$ donc sur E. Pour tout n, f_n est un homéomorphisme de E tel que $f_n \circ f_n = \text{id}$.

Soit G le groupe engendré par l'ensemble $\{f_n, n \geq 0\}$. Pour tout $(x,y) \in E \setminus \mathbb{S}^1$, l'orbite de (x,y) par G est $G(x,y) = \{(x,y),(-x,y)\}$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{S}^1$, on a

$G(x,y) = \{(x,y)\}$. Toute orbite est donc finie, de cardinal inférieur ou égal à 2 et l'espace des orbites E/G s'identifie à $\mathbb{S}^1 \cup \left\{\bigcup_{n\geq 0} C_n\right\}$. Il est non séparé ; en effet, si $u = (x,y)$ est un point de $\mathbb{S}^1 \setminus \{A, B\}$ alors il existe une suite $u_n = (x_n, y_n)$ qui converge vers $(x,y) = u$ et la suite $v_n = (-x_n, y_n)$ converge vers $(-x,y) = v$. On a $\{u\} = G(u) \neq G(v) = \{v\}$ et $G(u_n) = G(v_n)$ car $v_n = f_n(u_n)$; ce qui prouve que tout ouvert invariant contenant $G(u)$ rencontre tout ouvert invariant contenant $G(v)$; l'espace E/G est donc non séparé. L'ensemble des points non séparés de E/G est équivalent à $\mathbb{S}^1 \setminus \{A, B\}$. $\diamondsuit$

Dans toute la suite, on note (x,y,u) les coordonnées d'un point M de $\mathbb{R}^3$. Si on identifie $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et si on pose $z = x + iy$, (z,u) désigneront les coordonnées de M.

1.2. On va construire un homéomorphisme f d'un sous-espace métrique de $\mathbb{R}^3$ compact, connexe par arcs et non localement connexe par arcs et tel que toute orbite de f soit finie mais le cardinal des orbites n'est pas uniformément borné et l'espace des orbites non séparé.

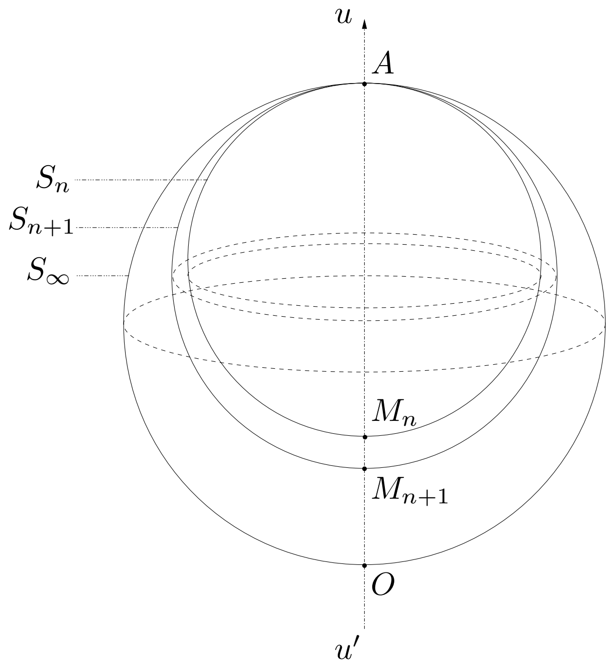

Fig. 2

On considère les points $A(0,0,1)$ et $M_n\left(0,0,\frac{1}{n+1}\right)$. On désigne par S_n la sphère de diamètre le segment $[AM_n]$ et par S_∞ la sphère de diamètre le segment $[AO]$. On désigne par E la réunion des sphères S_n et de la sphère S_∞ ; E est un sous-espace métrique de $\mathbb{R}^3$ compact et connexe par arcs. Il est non localement connexe par arcs.

Soit $r_n : S_n \longrightarrow S_n$ la rotation d'axe (Ou) et d'angle $\frac{2\pi}{n+1}$: pour tout $(z,u) \in S_n$ on a $r_n(z,u) = (ze^{\frac{2i\pi}{n+1}}, u)$. On définit l'application $f : E \to E$ par $f_{|S_n} = r_n$ pour tout $n \geq 1$ et $f_{|S_\infty} = id$. Cette application f est continue. En effet :

i) pour tout $n \geq 0$ on a $r_n(A) = A$;

ii) pour toute suite $((z_p, u_p))$ de E convergeant vers un point (z, u) de $S_\infty \setminus \{A\}$ on a $f(z_p, u_p) = \left(z_p e^{\frac{2i\pi}{n_p+1}}, u_p\right)$ si $(z_p, u_p) \in S_{n_p}$. On peut supposer que la suite n_p converge vers l'infini et alors $(f(z_p, u_p))$ converge vers $(z, u) = f(z, u)$; ce qui montre que f est continue. L'application f est un homéomorphisme d'inverse :

$$f^{-1}(z,u) = \begin{cases} (ze^{-\frac{2i\pi}{n+1}}, u) = r_n^{-1}(z,u) & \text{si } (z,u) \in S_n \\ (z,u) & \text{si } (z,u) \in S_\infty. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, la sphère S_n est une réunion d'orbites finies de cardinal au plus $n + 1$. Toute orbite de S_∞ est réduite à un singleton.

On remarque que, pour tout $u_0 \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le cercle $C_n^{u_0}$, intersection du plan horizontal $\{u = u_0\}$ et de la sphère S_n, est un ensemble invariant.

L'espace des orbites E/f est non séparé. En effet, si (z, u) et (z', u) sont deux points distincts de S_∞, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, la distance entre les cercles C_n^u et C_∞^u est inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{2}$. Comme la distance entre deux points consécutifs d'une même orbite de C_n^u est égale $\frac{2\pi\rho_n}{n+1}$, où ρ_n est le rayon du cercle C_n^u (on a $0 < \rho_n \leq 1$), pour n assez grand, il existe une orbite de C_n^u qui rencontre à la fois les boules de rayon ε et de centres respectivement (z, u) et (z', u) ; ce qui implique que tout ouvert invariant de (z, u) rencontre tout ouvert invariant de (z', u) et par suite E/f est non séparé. L'ensemble des points non séparé de E/f est $S_\infty \setminus \{O, A\}$.

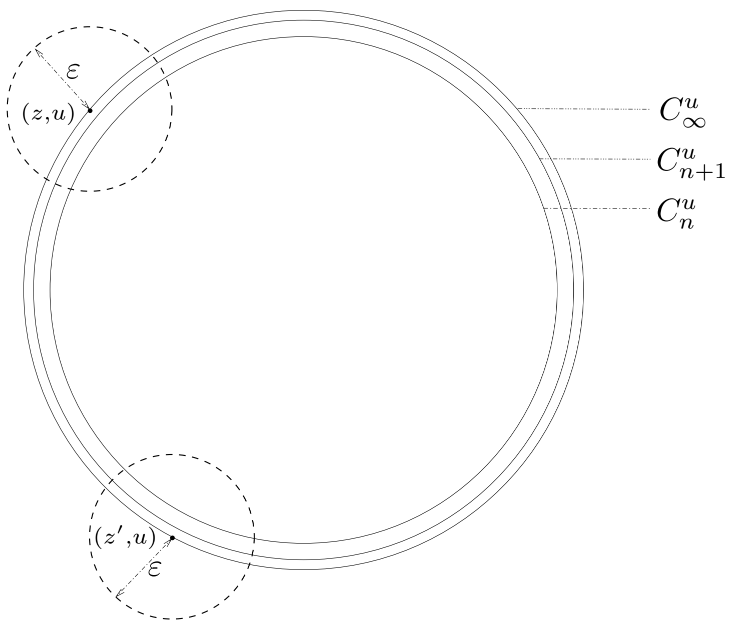

Fig. 3

La trace de E sur un plan horizontal

1.3. On va construire un homéomorphisme f d'un sous-espace métrique de $\mathbb{R}^3$ compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs tel que toute orbite de f est finie, le cardinal des orbites non uniformément borné et l'espace des orbites est séparé.

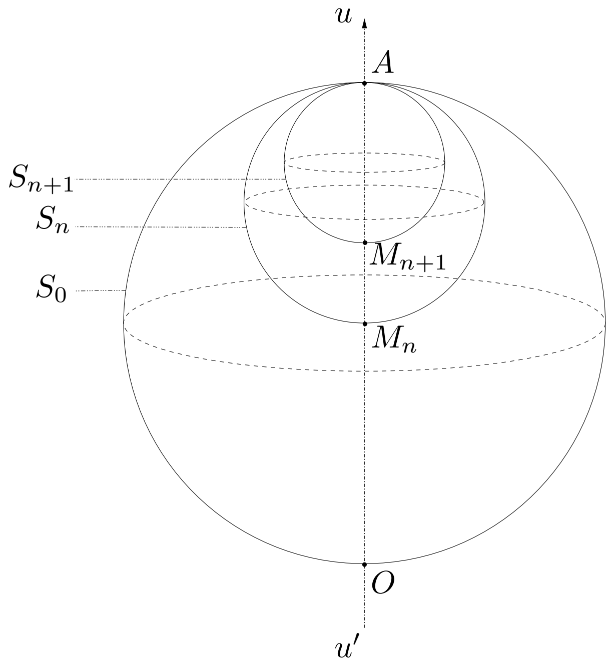

Fig. 4

On considère les points $A(0,0,1)$ et $M_n\left(0,0,1-\frac{1}{n}\right)$, où $n \in \mathbb{N}$ et les sphères S_n de diamètres les segments $[AM_n]$. L'espace E sera la réunion de la sphère $S_0 = \mathbb{S}^2$ et de toutes les sphères S_n ; $f : E \to E$ sera l'homéomorphisme défini par $f(z,u) = \left(ze^{\frac{2i\pi}{n+1}}, u\right)$ pour tout $(z,u) \in S_n$ et tout $n \geq 0$. Alors :

i) E est un sous-espace métrique de $\mathbb{R}^3$ compact connexe par arcs. Il est aussi localement connexe par arcs.

ii) f est un homéomorphisme tel que toute orbite est finie mais le cardinal des orbites est non uniformément borné.

iii) On vérifie que l'espace des orbites est séparé (il suffit de voir que le point A est séparé de tout autre point $(z_0,u_0) \in E \setminus \{A\}$). Si $(z_0,u_0) \in S_n \setminus \{A\}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les ensembles :

$$U_\varepsilon = \{(z,u) \in S_n : u_0 - \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon\} \quad \text{et} \quad V_\varepsilon = \{(z,u) \in E : 1 - \varepsilon < u \leq 1\}$$

soient des ouverts invariants non vides contenant respectivement les points (z_0,u_0) et A ; leur intersections $U_\varepsilon \cap V_\varepsilon$ est vide.

iv) Le groupe d'homéomorphismes engendré par f est équicontinu.

Remarque 1. Dans l'exemple 1.3, pour tout $n \geq 0$ donné, on considère l'application $f_n : E \longrightarrow E$ définie par :

$$f_n(z,u) = \begin{cases} \left(ze^{\frac{2i\pi}{n+1}}, u\right) & \text{si } (z,u) \in S_n \\ (z,u) & \text{si } (z,u) \notin S_n. \end{cases}$$

1) Le groupe d'homéomorphismes G engendré par les applications f_n (avec $n \in \mathbb{N}$) est équicontinu, et ses orbites coïncident avec les orbites de f ; alors toute orbite est finie pourtant G est infini (ce qui montre que le théorème d'Epstein [Eps] ne se généralise pas). En plus l'espace des orbites est séparé.

2) Pour $n \neq m$, f_n et f_m sont deux homéomorphismes périodiques distincts qui coïncident sur un ouvert non vide ($f_n = f_m$ sur $C^{S_n} \cup C^{S_m}$ où C^{S_n} désigne le complémentaire de S_n dans E) ; ceci implique que le théorème Montgomery et Zipin [MZ] ne se généralise pas au cas des sous-espaces métriques des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ compacts, connexes par arcs et localement connexes par arcs.

3) Dans l'exemple 1.3 on a un homéomorphisme non périodique défini sur un sous-espace métrique de $\mathbb{R}^3$ compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs tel que toutes les orbites sont finies. (Ce qui montre que le théorème de Newman [New] ne se généralise pas non plus).

1.4. On va construire un homéomorphisme f d'un sous-espace métrique de $\mathbb{R}^3$ compact, connexe par arcs et non localement connexe par arcs tel que toute orbite de f est finie, le cardinal des orbites est non uniformément borné et l'espace des orbites est séparé.

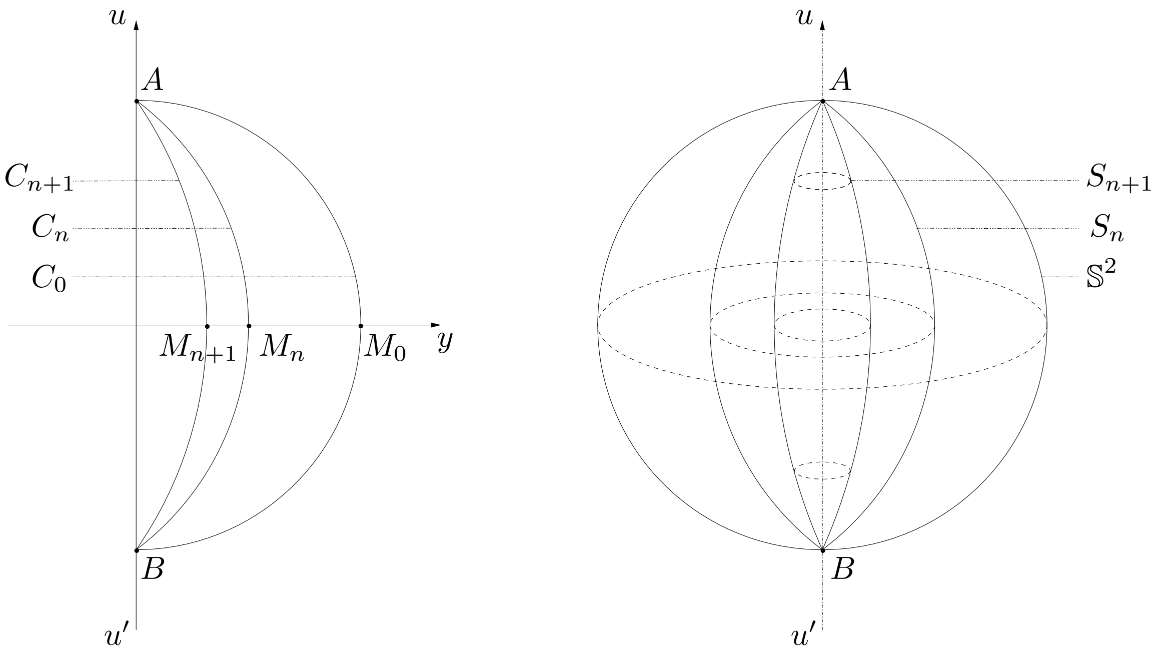

Fig. 5

On considère les points $A(0,0,1)$, $B(0,0,-1)$ et $M_n\left(0, \frac{1}{n+1}, 0\right)$, où n est un entier naturel. Soit C_n l'arc de cercle du plan (yu) d'extrémités A et B et passant par M_n. Soit S_n la surface de révolution obtenue par rotation de l'arc C_n autour de l'axe $(u'u)$. On note E la réunion du segment $[AB]$ et des surfaces S_n. On définit homéomorphisme

$f : E \longrightarrow E$ par :

$$f(z,u) = \begin{cases} (ze^{\frac{2i\pi}{n+1}}, u) & \text{si } (z,u) \in S_n \\ (0,u) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Dans cet exemple :

i) E est un sous-espace métrique de $\mathbb{R}^3$ compact, connexe par arcs mais il n'est pas localement connexe par arcs ;

ii) f est un homéomorphisme tel que toute orbite est finie et le cardinal des orbites n'est pas uniformément borné ;

iii) l'espace E/f est séparé.

On voit bien que dans l'exemple 1.2 on a les mêmes propriétés que dans l'exemple 1.4 sauf que dans ce dernier E est localement connexe par arcs.

Remarque 2. On n'a pas d'exemple d'espace métrique E compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs avec un homéomorphisme $f : E \longrightarrow E$ tel que toute orbite est finie mais E/f est non séparé. On n'a pas non plus d'exemple de sous-espace métrique de $\mathbb{R}^2$ et d'un homéomorphisme $f : E \to E$ ayant toutes ses orbites finies mais dont le cardinal des orbites est non uniformément borné (E/f est séparé ou non).

2. Actions équicontinues

Dans toute cette section G sera un groupe d'homéomorphismes d'un espace métrique E. Si A est une partie de E, $\overline{A}$ sera son adhérence ; l'orbite d'un point $x \in E$ sera notée $G(x)$.

Un ensemble $M \subset E$ est dit *minimal* s'il est fermé, invariant et minimal (au sens de l'inclusion) pour ces propriétés) ; une orbite est dite *minimale* si son adhérence est un minimal. On rappelle que la *classe* d'une orbite O, qu'on note $C\ell(O)$, est la réunion des orbites O' telles que $\overline{O}' = \overline{O}$. Bien sûr $C\ell(O) = \{x \in E : \overline{G(x)} = \overline{O}\}$. On a les propriétés qui suivent.

i) Supposons O propre ; alors $C\ell(O) = O$.

ii) L'adhérence de O est un ensemble minimal si, et seulement si, $\overline{O} = C\ell(O)$.

iii) Pour toute orbite O, on a $\overline{O} = \overline{C\ell(O)}$.

Le théorème qui suit donne quelques propriétés qualitatives des groupes équicontinus d'homéomorphismes d'un espace métrique E (c'est le cas des groupes d'isométries par exemple). Le groupe Homéo(E) des homéomorphismes de E sera muni de la topologie C^0 (appelée aussi *topologie compacte-ouverte*).

2.1. Théorème. *Soit G un groupe équicontinu d'homéomorphismes d'un espace métrique E. On a les propriétés suivantes.*

1) Toute orbite O est minimale.

2) Si toute orbite est fermée, l'espace des orbites E/G est séparé.

3) L'espace des classes d'orbites $E/\widetilde{G}$ est toujours séparé.

4) Si E est compact, l'adhérence $\overline{G}$ de G dans Homéo(E) est un sous-groupe compact d'homéomorphismes de E et, pour tout $x \in E$, on a $\overline{G}(x) = \overline{G(x)}$.

Preuve. 1) Soient x un point de O, y un point de $\overline{O}$ et $(g_n(x))$ une suite d'éléments de O qui converge vers y. Comme G est équicontinu, on a la propriété (P) qui suit :

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $z \in E$ avec $d(z, y) < \eta$ et pour tout $g \in G$, on ait $d(g(z), g(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Puisqu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $d(g_n(x), y) < \eta$ alors, pour tout $n \geq N$ (en prenant $g = g_n^{-1}$) on aura $d(x, g_n^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq N$; ce qui implique que la suite $(g_n^{-1}(y))$ converge vers x, donc $x \in \overline{G(y)}$ et $O \subset \overline{G(y)}$. Ainsi $\overline{G(y)} = \overline{O}$ et donc $\overline{O}$ est un ensemble minimal.

2) On suppose que E/G est non séparé. Alors il existe deux orbites distinctes $G(x)$ et $G(y)$ et deux suites (u_n), (v_n) convergeant respectivement vers x et y telles que, pour tout n, il existe $g_n \in G$ avec $v_n = g_n(u_n)$. Si ε et η sont comme dans la propriété (P) citée précédemment, il existe un entier N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on ait $d(v_n, y) < \eta$ et par suite $d(u_n, g_n^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ (on a $v_n = g_n(u_n)$) ; de plus il existe un entier naturel N_2 tel que, pour tout $n \geq N_2$, on ait $d(u_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $n \geq \sup(N_1, N_2)$ on a $d(x, g_n^{-1}(y)) \leq d(u_n, g_n^{-1}(y)) + d(u_n, x) < \varepsilon$; ce qui prouve que la suite $(g_n^{-1}(y))$ converge vers x et donc $x \in \overline{G(y)} = G(y)$ (car toute orbite est fermée) et alors $G(x) = G(y)$; ceci contredit l'hypothèse et montre donc que E/G est bien séparé.

3) Si l'espace des classes d'orbites $E/\widetilde{G}$ était non séparé, il existerait deux orbites $G(x)$ et $G(y)$ avec $\overline{G(x)} \neq \overline{G(y)}$ et deux suites (u_n), (v_n) convergeant respectivement vers x et y tel que, pour tout n, $\overline{G(u_n)} = \overline{G(v_n)}$ (on a utilisé le fait que la classe de toute orbite coïncide avec son adhérence). Puisque, pour tout ouvert non vide U, la réunion des classes d'orbites rencontrant U coïncide avec la réunion des orbites rencontrant U (saturé$_{\widetilde{G}}(U)$ = saturé$_G(U)$), on peut supposer que $G(u_n) = G(v_n)$ et par suite, pour tout n, il existe $g_n \in G$ avec $v_n = g_n(u_n)$. Comme dans la preuve de 2) on vérifie qu'on a $\overline{G(x)} = \overline{G(y)}$; ce qui contredit l'hypothèse.

4) Si de plus E est compact, G est équicontinu et l'adhérence de toute orbite est relativement compacte, d'après le théorème d'Ascoli ; l'adhérence $\overline{G}$ de G sera donc un sous-groupe compact d'homéomorphismes de E. Montrons que, pour tout $x \in E$, on a $\overline{G}(x) = \overline{G(x)}$.

Soit $y \in \overline{G}(x)$; alors il existe $g \in \overline{G}$ tel que $g(x) = y$. Comme il existe une suite (g_n) d'éléments de G qui converge vers g, $(g_n(x))$ converge vers $g(x) = y$; d'où $y \in \overline{G(x)}$.

Réciproquement, si $y \in \overline{G(x)}$, il existe une suite (g_n) de G telle que la suite $(g_n(x))$ converge vers y. Comme $\overline{G}$ est compact, il existe une sous-suite (g_{n_p}) de $\overline{G}$ qui converge vers $h \in \overline{G}$ donc $(g_{n_p}(x))$ converge vers $h(x)$, ce qui montre que $y = h(x) \in \overline{G}(x)$. D'où la propriété 4). ◇

2.2. Corollaire. *Soit G un groupe équicontinu d'homéomorphismes d'un espace métrique connexe E. Alors* :

1) *Si G a une orbite O localement dense, toute orbite est partout dense.* (En effet, dans ce cas $\overline{O}$ est un ensemble minimal d'intérieur non vide.)

2) *Toute orbite O propre est fermée.* (En effet, dans ce cas $\overline{O}\setminus O$ est un fermé invariant strictement contenu dans l'ensemble minimal $\overline{O}$ et par suite $\overline{O}\setminus O$ est vide.)

3) *Si E est compact et si G a une orbite O localement dense, le groupe $\overline{G}$ opère transitivement (si $x \in O$ on aura $\overline{G}(x) = \overline{G(x)} = \overline{O} = E$).*

2.3. Remarques

ii) Sous les hypothèses du théorème 1 et si E est compact, l'espace $E/\widetilde{G}$ des classes des orbites de G coïncide avec l'espace des orbites $E/\overline{G}$ de $\overline{G}$.

ii) Il existe un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ayant toutes ses orbites fermées non périodiques et l'espace des orbites $\mathbb{R}^2/f$ non séparé. Donc l'hypothèse d'équicontinuité dans le théorème 2.1 est substantielle.

2.4. Théorème. *Soit G un groupe dénombrable équicontinu d'homéomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Si G possède une orbite relativement compacte, toute orbite fermée est relativement compacte. On a le même résultat si E est un espace métrique compact connexe.*

Preuve. On va montrer que l'ensemble $A = \{x \in E : \overline{G(x)} \text{ compact}\}$ est ouvert et fermé (A est la réunion des orbites relativement compactes).

1) Montrons que A est un ouvert. Pour tout $x \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, le fait que $\overline{G(x)}$ soit un compact montre qu'il existe un nombre fini de points $y_1, \cdots, y_n$ de $\overline{G(x)}$ tels que :

$$\overline{G(x)} \subset \bigcup_{i=0}^{n} \overline{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

où $\overline{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ désigne la boule fermée de centre y_i et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $\overline{G(y_i)} = \overline{G(x)}$ (propriété 1 du théorème 2.1).

Comme G est équicontinu, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout point $y \in B(x, \eta)$, on ait $g(y) \in B\left(g(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$ pour tout $g \in G$. Pour chaque $g \in G$, il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $g(x) \in B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ donc $d(g(y), y_i) \leq d(g(x), y_i) + d(g(y), g(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On en déduit que l'orbite $G(y)$ est contenue dans le fermé borné

$$\bigcup_{i=0}^{n} \overline{B}(y_i, \varepsilon).$$

Comme E est un espace vectoriel réel de dimension finie ou E est un espace métrique compact, K est compact ; par suite $\overline{G(y)}$ est un compact et donc $y \in A$. On conclut que $B(x, \eta) \subset A$ et donc A est un ouvert.

2) Montrons que A est un fermé. Soit x un point de $\overline{A}$ et (x_n) une suite de A qui converge vers x. Comme G est équicontinu, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $g \in G$ et tout $y \in E$, on ait l'implication :

$$d(y, x) < \eta \Longrightarrow d(g(y), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or (x_n) converge vers x ; il existe donc N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_n, x) < \eta$; donc, pour tout $g \in G$ et tout $n \geq N$, on a $d(g(x_n), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ fixé. Le fait que $x_n \in A$ montre qu'il existe p éléments $y_1, \cdots, y_p$ dans $\overline{G(x_{n_0})}$ avec :

$$\overline{G(x_{n_0})} \subset \bigcup_{i=0}^{p} \overline{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

(d'après la preuve précédente). Soit $g \in G$; il existe y_i tel que $g(x_n) \in B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$. On a donc $d(g(x), y_i) \leq d(g(x), g(x_n) + d(g(x_n), y_i) < \varepsilon$. Ceci qui montre que l'orbite $G(x)$ est contenue dans le compact $\bigcup_{i=0}^{p} \overline{B}(y_i, \varepsilon)$ et par suite $x \in A$.

En conclusion, E étant connexe et A est à la fois ouvert et fermé, A est ou bien vide auquel cas il n'y a aucune orbite finie ou bien on a $A = E$ auquel cas toute orbite fermée est finie. $\diamondsuit$

Comme il existe un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ayant des orbites finies et des orbites fermées infinies, l'hypothèse d'équicontinuité est donc substantielle.

2.5. Théorème. *Soit G un groupe dénombrable d'isométries d'un espace vectoriel réel de dimension finie E. Supposons que toute orbite de G est finie ; alors le groupe G est fini.*

Preuve. On suppose que le groupe G est infini. Comme il est dénombrable, on peut l'écrire $G = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec $g_n \neq g_m$ si $n \neq m$. L'ensemble $A_{nm} = \{x \in E : g_n(x) = g_m(x)\}$ est un fermé. Puisque toute orbite est finie, tout élément de G est périodique et on a $E = \bigcup A_{nm}$. Le théoreme de Baire montre qu'il existe deux entiers n et p distincts pour lesquels l'intérieur de A_{pq} est non vide et par conséquent les isométries g_p et g_q coïncident sur un ouvert non vide ; par suite elles coincident partout, ce qui est absurde. $\diamondsuit$

L'exemple 1.2 montre qu'on ne peut pas remplacer dans ce théorème l'hypothèse "groupe d'isométries" par "groupe équicontinu".

3. Homotopie de Homéo$(\mathbb{S}^1)$

On note $\mathbb{S}^1$ le cercle vu comme groupe de Lie, quotient de $\mathbb{R}$ par le réseau $\Gamma = \mathbb{Z}$. La projection canonique $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ est un morphisme analytique de groupes de Lie. Tout homéomorphisme f de $\mathbb{S}^1$ qui préserve l'orientation se relève en un homéomorphisme $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissant et vérifiant la relation $\widetilde{f}(x+1) = \widetilde{f}(x) + 1$. Inversement, tout homéomorphisme $\widetilde{f}$ de $\mathbb{R}$ strictement croissant et vérifiant cette relation induit un homéomorphisme f du cercle préservant l'orientation. Notons G le sous-groupe de Homéo$_+(\mathbb{R})$ (groupe des homéomorphismes strictement croissants de $\mathbb{R}$) formé de tels éléments. L'application $\pi : \widetilde{f} \in G \longrightarrow f \in$ Homéo$(\mathbb{S}^1)$ est un morphisme surjectif dont le noyau est constitué du sous-groupe Σ des translations entières (isomorphe à $\mathbb{Z}$). On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Sigma \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 1.$$

Le cercle $\mathbb{S}^1$ s'identifie au sous-groupe de Homéo$_+(\mathbb{S}^1)$ formé des rotations. Il est bien connu que Homéo$_+(\mathbb{S}^1)$ muni de la topologie C^0 se rétracte par déformation sur son sous-groupe $\mathbb{S}^1$. Il existe diverses démonstrations de ce fait dont une élémentaire se trouve dans [Ghy]. L'objet de cette section est d'en donner une autre démonstration élémentaire complètement différente.

Soient $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in G$ et $\widetilde{h} = \widetilde{f} - \widetilde{g}$. Alors, de façon évidente, $\widetilde{h}$ est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ périodique de période 1, donc bornée. On pose :

$$\widetilde{\delta}(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x)|.$$

Pour tout $f \in \text{Homéo}(\mathbb{S}^1)$, il existe un et un seul $\widetilde{f}_0 \in G$ tel que :

$$\inf_{\pi(\widetilde{f}) = f} \widetilde{\delta}(\widetilde{f}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \widetilde{\delta}(\widetilde{f}_0, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}).$$

Si $f, g \in \text{Homéo}(\mathbb{S}^1)$, on pose :

$$\delta(f, g) = \widetilde{\delta}(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_0).$$

On a donc muni les groupes G et $\text{Homéo}(\mathbb{S}^1)$ des distances respectives $\widetilde{\delta}$ et δ pour lesquelles la projection π est une isométrie locale. Il est aussi facile de vérifier que G est un ouvert convexe, donc connexe par arcs, de l'espace vectoriel des applications continues $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie C^0 (convergence uniforme sur les parties compactes).

Nous allons définir une application $\Phi : G \longrightarrow \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ est le groupe des translations de $\mathbb{R}$. Soit $\widetilde{f} \in G$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto \widetilde{f}(x+t) - t \in \mathbb{R}$ est périodique de période 1. Posons :

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{f})(x) = \int_0^1 \left[\widetilde{f}(x+t) - t\right] dt.$$

3.1. Proposition. *Pour tout élémlent $\widetilde{f} \in G$, l'application $\widetilde{\Phi}(\widetilde{f})$ ainsi construite est une translation de $\mathbb{R}$.*

<u>*Preuve*</u>. Soit τ une translation $x \in \mathbb{R} \longrightarrow x + a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{\Phi}(\widetilde{f}) \circ \tau\right](x) &= \Phi(\widetilde{f})(x+a) \\
&= \int_0^1 \left[\widetilde{f}(x+a+t) - t\right] dt \\
&= \int_a^{a+1} \left[\widetilde{f}(x+t) - t + a\right] dt \\
&= \int_a^{a+1} \left[\widetilde{f}(x+t) - t\right] dt + a \\
&= \int_0^1 \left[\widetilde{f}(x+t) - t\right] dt + a \\
&= \tau \circ \Phi(\widetilde{f})(x).
\end{aligned}$$

On voit donc que $\widetilde{\Phi}(\widetilde{f})$ commute avec toute translation de $\mathbb{R}$; c'est donc une translation aussi. $\diamondsuit$

Soit $f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$; notons $\widetilde{f}$ un de ses relevés dans G. Posons $\Phi(f) = \pi(\widetilde{\Phi}(\widetilde{f}))$. On voit facilement que $\Phi(f)$ ne dépend pas du relevé choisi et que c'est une rotation du cercle *i.e.* un élément de $\mathbb{S}^1$. D'autre part, si on définit $\widetilde{H} : G \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{T}$ par :

$$\widetilde{H}(\widetilde{f}, s) = (1-s)\widetilde{\Phi}(\widetilde{f}) + sI$$

on obtient une homotopie entre $\widetilde{\Phi}$ et l'identité I de $\mathcal{T}$. L'application $\widetilde{H}$ induit alors une homotopie $H : \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par :

$$H(f, s) = \pi\left[\widetilde{H}(\widetilde{f}, s)\right]$$

(où $\widetilde{f} \in G$ est un relevé quelconque de f) entre Φ et l'identité I de $\mathbb{S}^1$. (I est vu comme la rotation d'angle nul.) On a donc démontré le :

3.2. Théorème. *Le groupe topologique Homéo$_+(\mathbb{S}^1)$ se rétracte par déformation sur son sous-groupe de Lie $\mathbb{S}^1$.*

Références

[Dre] Dress, A., Newmam's theorems on transformation groups. Topology Vol. 8, (1969) 203 - 207.

[Eps] Epstein, D.A., A topology for the space of foliations. Lecture Notes in Math. 597, (1977) 132-150.

[Ghy] Ghys, E., Groups acting on the circle. Enseignement Mathématique, 47 n. 3-4, (2001), 329-407.

[MZ] Montgomery, D. & Zippin, L., *Topological Transformation Groups.* Interscience (1955).

[HS] Hattab, H. & Salhi, E., Groups of homeomorphisms, foliations and spectral topology. Prépublication Université de Sfax (2002).

A. El Kacimi Alaoui
LAMATH, Le Mont Houy
Université de Valenciennes
59313 Valenciennes Cedex 9 – France
aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr

H. Hattab & E. Salhi
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences, BP 802
Sfax 3018 – Tunisie
Hawete.Hattab@fss.rnu.tn
Ezzeddine.Salhi@fss.rnu.tn