

UVHC

Date de l'épreuve :	14 décembre 2009
Mention :	Mathématiques
Spécialité et/ou parcours :	Mathématiques, Mathématiques pour PE
Semestre et session :	S5 - Session 1
Module :	Géométrie 5 - Code : S5MAGEOS
Durée de l'épreuve :	3 heures
Matériel :	Documents, calculatrices et portables non autorisés

SUJET :

Rédiger sur deux copies différentes : les exercices 1 et 2 sur l'une et les exercices 3 et 4 sur l'autre.

On désigne par $\vec{\mathcal{V}}$ le plan vectoriel (tel qu'il a été considéré en cours). Lorsqu'on parlera de plan affine euclidien dirigé par $\vec{\mathcal{V}}$, on sous-entendra qu'on a muni $\vec{\mathcal{V}}$ d'un produit scalaire qu'on notera \langle , \rangle au besoin.

Exercice 1

On se donne un plan affine euclidien $(\vec{\mathcal{V}}, \mathcal{P}, \langle , \rangle)$ et on convient de noter MN la distance entre deux points M et N . On appelle *distance* entre deux droites Δ_1 et Δ_2 le nombre :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \inf\{M_1M_2 \text{ avec } M_1 \in \Delta_1 \text{ et } M_2 \in \Delta_2\}.$$

1 - Montrer que si $d(\Delta_1, \Delta_2) > 0$ alors les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

On se donne un segment $[AB]$ de longueur 1 et un segment $[CD]$ de longueur $k > 0$. (Ces deux segments permettront d'en construire d'autres de longueur 1 ou k .)

2 - Soit Δ une droite. Construire à la règle et au compas une droite Δ' telle que $d(\Delta, \Delta') = k$. (Il est demandé de détailler et justifier toutes les étapes de la construction.)

On se donne deux droites Δ_1 et Δ_2 se coupant en un point ω . Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on note H_1 et H_2 ses projections orthogonales respectivement sur Δ_1 et Δ_2 .

3 - Décrire géométriquement l'ensemble $\Delta = \{M \in \mathcal{P} : MH_1 = kMH_2\}$ et le construire à la règle et au compas.

Exercice 2

On se donne un plan affine euclidien $(\vec{\mathcal{V}}, \mathcal{P}, \langle , \rangle)$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$. On note Δ_0 et Δ_1 les droites d'équations respectives $x - y = 0$ et $x - y = 1$.

1 - Dire pourquoi Δ_0 et Δ_1 sont parallèles. On note τ la translation de vecteur \vec{u} de norme minimale envoyant Δ_0 sur Δ_1 . Calculer les coordonnées de \vec{u} dans la base (\vec{u}_1, \vec{u}_2) .

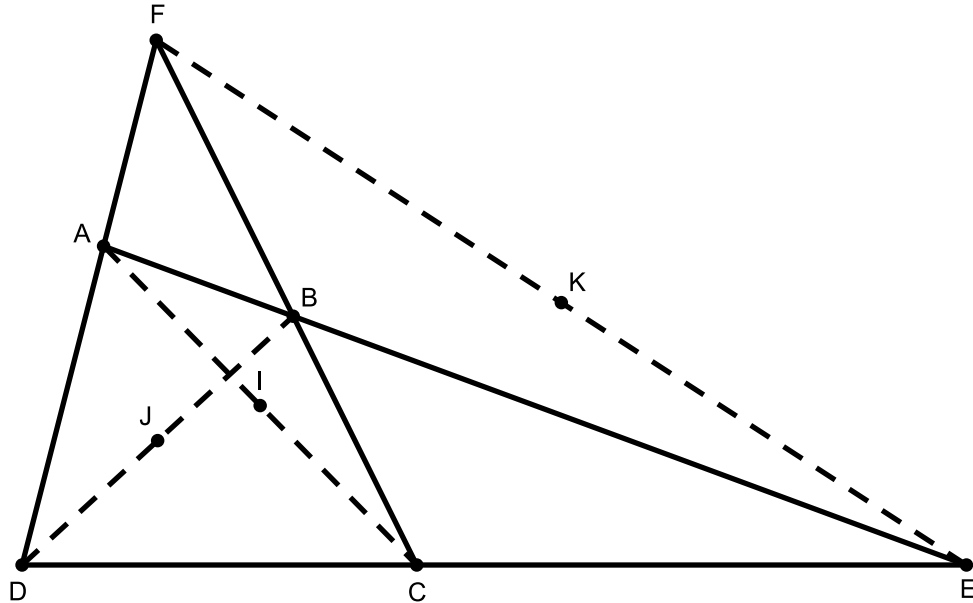
Soient σ_0 et σ_1 les réflexions d'axes respectifs Δ_0 et Δ_1 . Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M , (x_0, y_0) seront celles du point $M_0 = \sigma_0(M)$ et (x_1, y_1) celles du point $M_1 = \sigma_1(M)$

2 - Calculer (x_0, y_0) en fonction de (x, y) . En déduire (x_1, y_1) en fonction de (x, y) . (Se rappeler que la composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.)

3 - Soit \mathcal{U} une droite affine d'équation $ax + by + c = 0$. Donner l'équation de sa transformée \mathcal{U}_1 par la réflexion σ_1 .

Exercice 3

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que les droites (AB) et (CD) se coupent en E et (AD) et (BC) se coupent en F (cf. figure). (On dira que $ABCD$ est un *quadrilatère complet*.) On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BD]$ et $[EF]$. L'objet de l'exercice est de démontrer le Théorème de Newton : *les trois points I, J et K sont alignés*.



Soient G et H les points du plan tels que les quadrilatères $FDGB$ et $FAHC$ soient des parallélogrammes. Soient h l'homothétie de centre E qui envoie le point D sur C , h' l'homothétie de même centre qui envoie B sur A et $\phi = h \circ h'$.

1 - Montrer que ϕ transforme la droite (BG) en la droite (HC) .

2 - Quelle est l'image de la droite (DG) par ϕ ? En déduire le point $\phi(G)$.

3 - Montrer que les points E, G et H sont alignés.

4 - Soit f l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$. Quelles sont les images respectives des points G et H par f ? En déduire le résultat (*i.e.* la conclusion du théorème de Newton).

Exercice 4

Dans un plan affine euclidien $(\vec{V}, \mathcal{P}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on se donne un triangle ABC (avec A, B et C non alignés). Soient A', B' et C' trois points respectivement sur les segments $[BC]$, $[AC]$ et $[CA]$. Soient Γ_1 le cercle circonscrit au triangle $AB'C'$, Γ_2 celui circonscrit au triangle $BA'C'$ et Γ_3 celui circonscrit au triangle $CA'B'$.

Montrer que les trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 se coupent en un même point ω .

Corrigé

Exercice 1

1 - Deux droites dans le plan sont parallèles disjointes, confondues ou sécantes ; ce sont les seules positions relatives possibles et qui s'excluent mutuellement bien entendu. Si Δ_1 et Δ_2 n'étaient pas parallèles disjointes elles auraient un point commun M ; dans ce cas $d(\Delta_1, \Delta_2) = \inf_{M_1 \in \Delta_1, M_2 \in \Delta_2} d(M_1, M_2) = d(M, M) = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse $d(\Delta_1, \Delta_2) > 0$. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont donc parallèles disjointes. \diamond

2 - Par la première question, les droites cherchées seront parallèles à Δ . Sur celle-ci on prend deux points distincts M_1 et M_2 . On trace les cercles de même rayon $\rho > \frac{MM'}{2}$ et de centres respectifs M_1 et M_2 ; ces deux cercles se coupent en deux points J_1 et J_2 et la droite (J_1J_2) coupe perpendiculairement Δ en un point H . Sur (J_1J_2) on construit les points N_1 et N_2 tels que $HN_1 = HN_2 = k$ (on reporte la longueur du segment $[CD]$ qui est donné). Les droites Δ'_1 et Δ'_2 parallèles à Δ et passant respectivement par N_1 et N_2 répondent à la question. \diamond

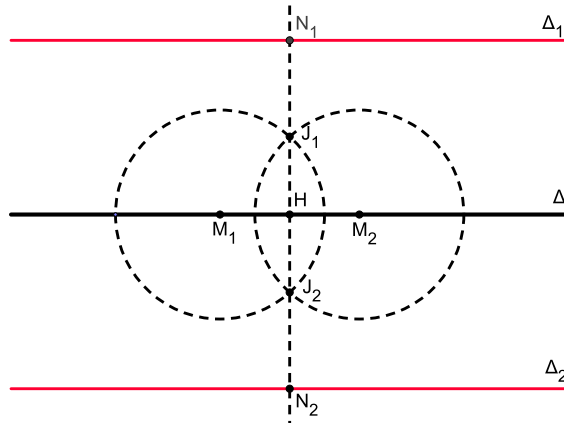


Fig. 1

3 - On peut d'abord remarquer que le point ω appartient à l'ensemble cherché Δ . Si M est un autre point de Δ distinct de ω , la droite (ωM) est contenue dans Δ . En effet, soient N un point de (ωM) et K_1, K_2 ses projections orthogonales respectivement sur Δ_1 et Δ_2 . Les triangles ωMH_1 et ωNK_1 sont homothétiques (les droites (MH_1) et (NK_1) sont parallèles car toutes deux orthogonales à Δ_1) ; leurs côtés homologues sont donc proportionnels et en particulier on a $\frac{MH_1}{NK_1} = \frac{\omega M}{\omega N}$; de même, les triangles ωMH_2 et ωNK_2 sont homothétiques, d'où $\frac{MH_2}{NK_2} = \frac{\omega M}{\omega N}$. Ces deux égalités nous donnent $\frac{MH_1}{NK_1} = \frac{MH_2}{NK_2}$ i.e. $k = \frac{MH_1}{MH_2} = \frac{NK_1}{NK_2}$, ce qui montre que $NK_1 = kNK_2$ et donc $N \in \Delta$.

Pour construire l'ensemble Δ , il suffit de construire les points M qui sont à la distance 1 de Δ_2 et à la distance k de Δ_1 . Il y en a quatre a priori : ce sont les intersections des

deux droites qui sont à la distance 1 de Δ_2 et des deux droites qui sont à la distance k de Δ_1 (en vert sur Fig. 1). Les diagonales du parallélogramme formé par ces quatre points se coupent au point ω ; donc l'ensemble Δ qu'on cherche est la réunion des deux droites qui portent ces diagonales (en rouge sur Fig. 1). \diamond

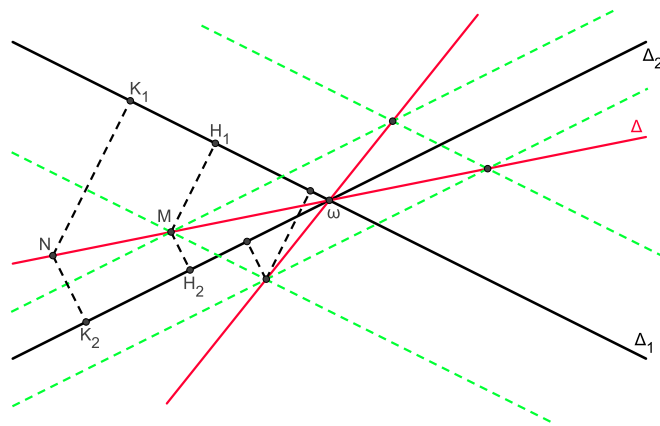


Fig. 2

Exercice 2

1 - Les droites Δ_0 et Δ_1 ont toutes les deux le vecteur de coordonnées $(1, 1)$ comme vecteur directeur ; elles sont donc parallèles. Le vecteur \vec{u} qui définit la translation τ est orthogonal à ces deux droites et donc au vecteur $(1, 1)$; par suite $\vec{u} = \lambda(1, -1)$ où λ est le réel positif tel que $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (distance entre Δ_0 et Δ_1). Le calcul donne $\lambda = \frac{1}{2}$; d'où $\vec{u} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. \diamond

2 - La droite Δ_0 est la première bissectrice de l'angle droit formé par les axes de coordonnées. Si donc M est un point de coordonnées (x, y) , son symétrique par rapport à Δ_0 a pour coordonnées $(x_0, y_0) = (y, x)$.

Soit t la translation de vecteur $2\vec{u} = (1, -1)$; on sait que $\sigma_1 \circ \sigma_0 = t$. Par suite $\sigma_1 = t \circ \sigma_0^{-1} = t \circ \sigma_0$. D'où $(x_1, y_1) = (y, x) + (1, -1) = (y + 1, x - 1)$. \diamond

3 - De la question précédente on déduit $(x, y) = (y_1 + 1, x_1 - 1)$. On reporte x et y dans l'équation $ax + by + c = 0$ et on obtient l'équation de la droite \mathcal{U}_1 , transformée de \mathcal{U} par la réflexion σ_1 : $bx_1 + ay_1 + a - b + c = 0$. \diamond

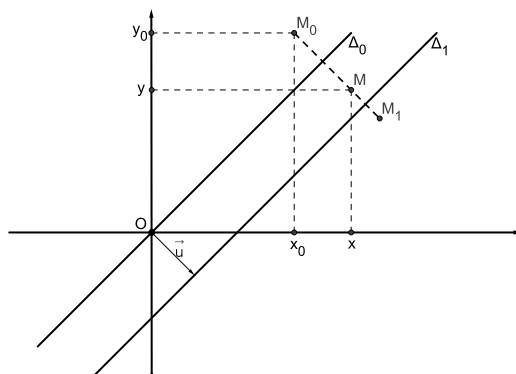


Fig. 3

Exercice 3

1 - L'homothétie h' envoie la droite (BG) sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point $A = h'(B)$; c'est donc la droite (AD) . Celle-ci se transforme par h en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $C = h(D)$; c'est donc la droite (HC) . En résumé on a $\phi((BG)) = (HC)$. \diamond

2 - Comme h et h' ont même centre (le point E), elles commutent ; on a donc aussi $\phi = h' \circ h$. L'homothétie h envoie la droite (DG) sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point $C = h(D)$; c'est donc la droite (BC) . Celle-ci se transforme par h' en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $A = h'(B)$; c'est donc la droite (AH) . En résumé on a $\phi((DG)) = (AH)$.

Comme on vient de le voir $\phi((BG)) = (HC)$ et $\phi((DG)) = (AH)$. On a donc :

$$\phi(G) = \phi((BG) \cap (DG)) = (HC) \cap (AH) = H.$$

\diamond

3 - L'homothétie ϕ est centrée en E et envoie le point G sur le point H ; les trois points E, H et G sont donc alignés. \diamond

4 - Le quadrilatère $FDGB$ est un parallélogramme, donc ses diagonales $[DB]$ et $[FG]$ se coupent en leurs milieux qui n'est rien d'autre que le point J (milieu de $[DB]$ par hypothèse). Donc $f(G) = J$. De la même manière on montre que $f(H) = I$. Comme K est le milieu de $[FE]$ on a $f(E) = K$. L'homothétie f transforme donc les trois points alignés H, G et E respectivement en I, J et K . Il en résulte que les points I, J et K sont alignés, ce qui démontre le théorème de Newton. \diamond

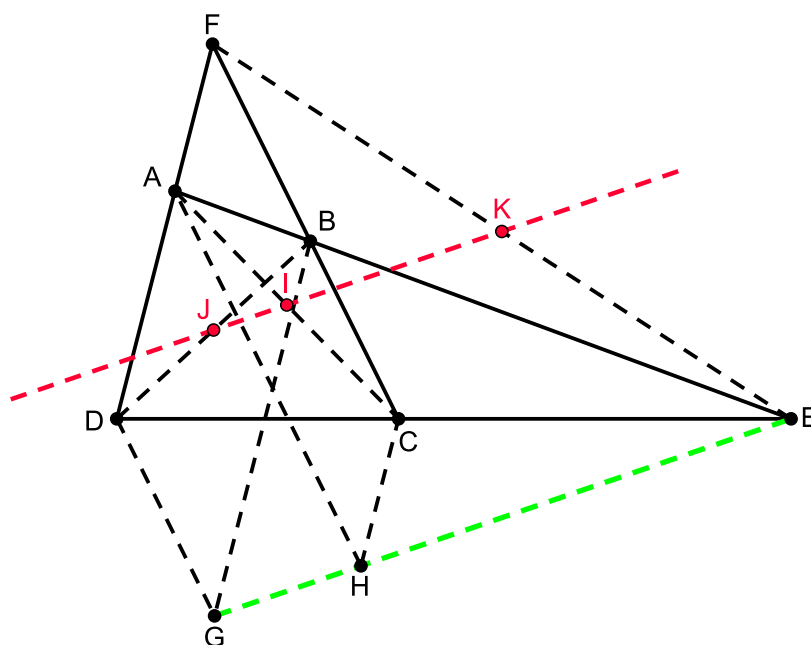


Fig. 4

Exercice 4

Notons ω le deuxième point d'intersection des cercles Γ_2 et Γ_3 et montrons qu'il est sur Γ_1 . Comme les quatre points $A'CB'\omega$ sont cocycliques, on a :

$$(\mathcal{R}_1) \quad (\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{\omega B'}) + (\overrightarrow{C B'}, \overrightarrow{C A'}) = \pi.$$

De même les quatre points $C'BA'\omega$ étant cocycliques, on a :

$$(\mathcal{R}_2) \quad (\overrightarrow{\omega C'}, \overrightarrow{\omega A'}) + (\overrightarrow{B A'}, \overrightarrow{B C'}) = \pi.$$

D'autre part, on a clairement :

$$(\mathcal{R}_3) \quad (\overrightarrow{\omega B'}, \overrightarrow{\omega C'}) + (\overrightarrow{\omega C'}, \overrightarrow{\omega A'}) + (\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{\omega B'}) = 2\pi$$

et (somme des angles du triangle ABC) :

$$(\mathcal{R}_4) \quad (\overrightarrow{A C'}, \overrightarrow{A B'}) + (\overrightarrow{B A'}, \overrightarrow{B C'}) + (\overrightarrow{C B'}, \overrightarrow{C A'}) = \pi.$$

En sommant membre à membre les égalités (\mathcal{R}_3) et (\mathcal{R}_4) et tenant compte de (\mathcal{R}_1) et (\mathcal{R}_2) , on voit que $(\overrightarrow{\omega B'}, \overrightarrow{\omega C'}) + (\overrightarrow{A C'}, \overrightarrow{A B'}) = \pi$; les quatre points A, C', ω et B' sont donc cocycliques, c'est-à-dire le point ω est sur le cercle Γ_1 . Conclusion : les trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 se coupent au point ω .

◇

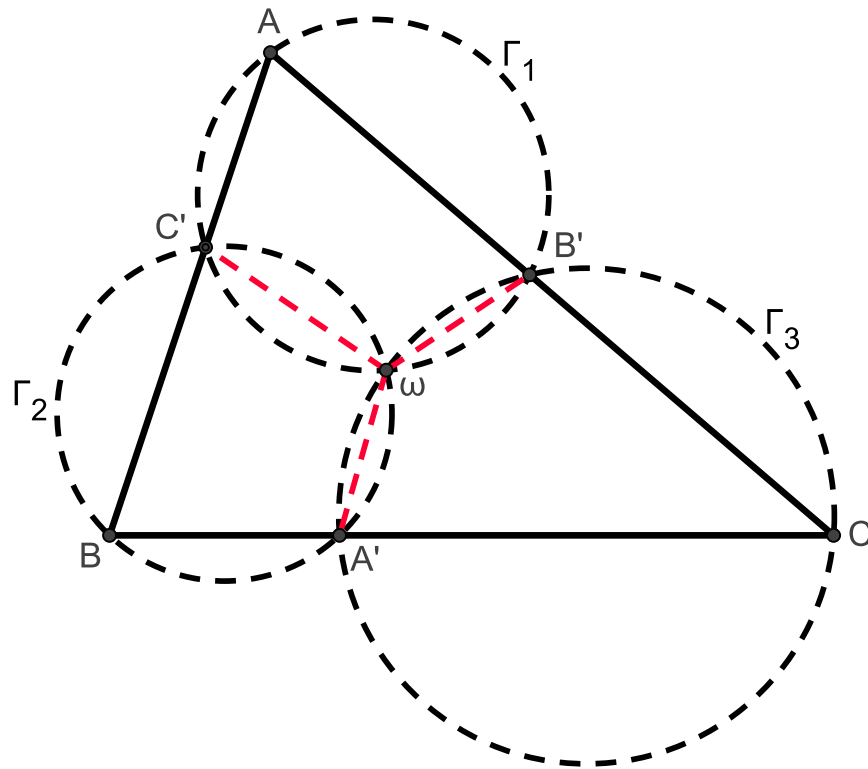


Fig. 5