

UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

**LICENCE DE MATHÉMATIQUES**  
**Géométrie affine et euclidienne**

par  
AZIZ EL KACIMI

---

**CAHIER D'EXERCICES**

---

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2005-2006

---

## Fiche 1

---

### Exercice 1

On note  $\vec{E}$  l'espace vectoriel des vecteurs du plan. On le munit d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . On pose  $\vec{k} = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{\ell} = \vec{i} - \vec{j}$ .

1 - Montrer que  $(\vec{k}, \vec{\ell})$  est une base de  $\vec{E}$ .

2 - Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $\vec{E}$  de coordonnées  $(x, y)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Calculer ses coordonnées  $(x', y')$  dans la base  $(\vec{k}, \vec{\ell})$ .

### Exercice 2

On rappelle la définition d'un espace affine : *On dira qu'un ensemble  $E$  est un **espace affine de direction** un espace vectoriel  $\vec{E}$  si le groupe  $(\vec{E}, +)$  opère **simplement** et **transitivement** sur  $E$  i.e. s'il existe une application  $T : (\vec{u}, x) \in \vec{E} \times E \mapsto T(\vec{u}, x) \in E$  telle que : a)  $T(\vec{0}, x) = x$  pour tout  $x \in E$  ; b)  $T(\vec{u}, T(\vec{v}, x)) = T(\vec{u} + \vec{v}, x)$  pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$  et tout  $x \in E$  ; c)  $T(\vec{u}, x) = x$  implique  $\vec{u} = \vec{0}$  (simplicité) ; d) pour tous  $x, y \in E$  il existe  $\vec{u} \in \vec{E}$  tel que  $y = T(\vec{u}, x)$  (transitivité).*

Soient  $E$  un ensemble et  $\vec{E}$  un espace vectoriel. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1 - L'ensemble  $E$  a une structure d'espace affine de direction  $\vec{E}$ .

2 - Il existe une application  $(x, y) \in E \times E \mapsto \vec{xy} \in \vec{E}$  telle que : a) pour tous  $x, y, z \in E$  on a  $\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$  (relation de Chasles) ; b) pour tout  $x \in E$ , l'application  $y \in E \mapsto \vec{xy} \in \vec{E}$  est une bijection.

3 - Le groupe abélien  $(\vec{E}, +)$  est isomorphe à un groupe de bijections de l'ensemble  $E$  agissant transitivement (sur  $E$ ).

### Exercice 3

Soient  $E$  un ensemble,  $\vec{E}$  un espace vectoriel et  $f : E \rightarrow \vec{E}$  une bijection.

1 - Montrer que l'application  $E \times E \rightarrow \vec{E}$  qui à  $(x, y)$  associe le vecteur  $f(y) - f(x)$  munit  $E$  d'une structure d'espace affine de direction  $\vec{E}$ .

2 - Montrer que deux bijections  $f, g : E \rightarrow \vec{E}$  définissent la même structure affine si, et seulement si,  $g \circ f^{-1}$  est une translation de  $\vec{E}$ .

### Exercice 4

Dans le plan on se donne quatre points alignés  $A, B, C$  et  $D$  tels que les segments  $[AB]$  et  $[CD]$  aient le même milieu  $I$ . Soit  $E$  un point non situé sur la droite qui porte  $A$  et  $B$  (et donc aussi  $C$  et  $D$ ). Montrer que les triangles  $EAB$  et  $ECD$  ont même centre de gravité.

---

## Fiche 2

---

### Exercice 1

Soient  $(E, \vec{E})$  un plan affine. Un *parallélogramme* dans  $E$  est la donnée de quatre points  $A, B, C$  et  $D$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  ou  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . On se donne quatre points  $A, B, C$  et  $D$  tels que trois quelconques d'entre eux soient affinement indépendants. Soient  $K, L, M$  et  $N$  les milieux respectifs des segments  $[AB], [BC], [CD]$  et  $[DA]$ .

1 - Montrer que les quatre points  $K, L, M$  et  $N$  forment un parallélogramme.

On notera  $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$  et  $(d_1, d_2)$  les coordonnées respectivement de  $A, B, C$  et  $D$  dans un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

2 - Calculer les coordonnées cartésiennes  $(k_1, k_2), (\ell_1, \ell_2), (m_1, m_2)$  et  $(n_1, n_2)$  respectivement des points  $K, L, M$  et  $N$ .

3 - On note  $\Delta$  l'enveloppe convexe des points  $A, B, C$  et  $D$ . Montrer que  $\Delta$  est définie par un système d'inéquations linéaires dont chacune est du type :

$$\alpha x + \beta y + \gamma \geq 0$$

où  $(x, y)$  sont les coordonnées d'un point de  $E$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 2

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  de sa structure affine canonique. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $A, B$  et  $C$  respectivement les trois points  $(\lambda, 1 - \lambda^2, 0), (\lambda, 1, -\lambda^2)$  et  $(0, 1 - \lambda^2, \lambda)$ .

1 - Quel est l'ensemble  $\Lambda$  des valeurs  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour lesquelles les points  $A, B$  et  $C$  engendrent un plan affine  $\mathcal{P}_\lambda$  ? Montrer que sa direction  $\vec{\mathcal{P}}_\lambda$  est indépendante de  $\lambda \in \Lambda$ . Donner une équation cartésienne définissant  $\mathcal{P}_\lambda$ .

2 - Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , déterminer le barycentre  $G$  des points  $A, B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{4}$ .

3 - Pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les points  $O, A, B$  et  $G$  forment-ils un repère affine ? Pour ces valeurs, déterminer les coordonnées barycentriques du point  $C$  dans ce repère.

### Exercice 3

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  de sa structure affine canonique. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $A, B$  et  $C$  respectivement les trois points de coordonnées respectives  $(a, 0, 0), (0, b, 0)$  et  $(0, 0, c)$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels.

Donner un système d'équations cartésiennes définissant le sous-espace affine engendré par les points  $A, B$  et  $C$ .

---

## Fiche 3

---

### Exercice 1

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure affine canonique. Soit  $f_\lambda$  l'application  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\lambda x + y + 2z - 1, (1 + \lambda^2)x + \lambda y + 6z - 3)$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel. Pour chaque valeur de ce paramètre  $\lambda$ , on notera  $\mathcal{D}_\lambda$  l'ensemble des  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $f_\lambda(x, y, z) = (0, 0)$ .

1 - Montrer que, pour tout  $\lambda$ ,  $\mathcal{D}_\lambda$  est une droite affine.

2 - Montrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_\lambda$  passent par un point unique  $\omega$  dont on déterminera les coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ .

### Exercice 2

On note  $\vec{E}$  l'espace vectoriel des fonctions continues  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . On le munit de sa structure affine canonique.

1 - Montrer que  $\vec{E}$  est de dimension infinie. (*Indication* : observer qu'il contient toutes les fonctions polynômes.)

Soit  $\lambda$  un nombre réel. On considère la partie  $\mathcal{H}_\lambda$  de  $\vec{E}$  donnée par

$$H_\lambda = \left\{ F \in \vec{E} : \int_0^1 F(x) dx + \lambda(F(0) + 1) = 0 \right\}.$$

2 - Montrer que  $H_\lambda$  est un sous-espace affine. Quelle est sa direction  $\vec{H}_\lambda$  ?

3 - Montrer que, pour tout  $\lambda$ ,  $\vec{H}_\lambda$  est un hyperplan vectoriel de  $\vec{E}$  i.e. admet un supplémentaire  $\vec{W}$  de dimension 1.

On suppose maintenant que  $\vec{E}$  est l'espace des fonctions polynômes en l'indéterminée  $e^x$  de la forme

$$F(x) = a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x}$$

où  $a_0, a_1$  et  $a_2$  sont des nombres réels.

4 - Donner l'équation (ou les équations) explicite qui définit le sous-espace affine  $H_\lambda$ .

5 - Pour chaque  $\lambda$ , donner une base de l'espace vectoriel  $\vec{H}_\lambda$ .

6 - Montrer que les hyperplans affines  $H_\lambda$  passent par une droite fixe  $D$  (indépendante de  $\lambda$ ) et qu'on déterminera.

---

## Fiche 4

---

### Exercice 1

Soit  $\vec{E}$  un plan vectoriel muni de sa structure affine canonique et d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Les coordonnées d'un point  $M$  relativement à ce repère seront notées  $(x, y)$ .

1 - Tracer les droites affines  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  du plan dont les équations respectives sont

$$\begin{cases} x + y = 5 & \text{pour } \mathcal{D}_1 \\ x - y = -5 & \text{pour } \mathcal{D}_2 \\ 2x - y = 3 & \text{pour } \mathcal{D}_3 \end{cases}$$

2 - Déterminer la région  $\Delta$  du plan définie par le système d'inégalités qui suit.

$$\begin{cases} x + y \leq 5 & (1) \\ x - y \geq -5 & (2) \\ 2x - y \leq 3 & (3) \\ y \geq 0 & (4) \end{cases}$$

3 - Montrer que  $\Delta$  est un quadrilatère convexe dont on déterminera les sommets.

### Exercice 2

Soit  $\vec{E}$  un espace vectoriel de dimension 3 muni de sa structure affine canonique et d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . (La base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  étant supposée directe.)

1 - Donner une équation cartésienne de l'hyperplan vectoriel engendré par les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2 - Quelles conditions doit satisfaire un troisième vecteur  $\vec{e}_3 \in \vec{E}$  pour que le système  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  soit une base directe de  $\vec{E}$  ?

### Exercice 3

Une entreprise de meubles fabrique des tables de salle à manger  $T_1$  et des tables de cuisine  $T_2$  en utilisant trois machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

Pour fabriquer une table  $T_1$ , il faut utiliser la machine  $M_1$  pendant une heure, la machine  $M_2$  pendant une heure et la machine  $M_3$  pendant trois heures. Pour une table  $T_2$  il faut une heure de  $M_1$ , deux heures de  $M_2$  et une heure de  $M_3$ .

Les seules contraintes sont que, pour la période à venir, les machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  ne sont respectivement disponibles que 60 heures, 90 heures et 150 heures.

Sachant qu'une table  $T_1$  rapporte 50 euros et une table  $T_2$  rapporte 25 euros, calculer ce que doit produire l'entreprise pour réaliser le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice.

---

## Fiche 5

---

### Exercice 1

Soit  $(E, \vec{E})$  un espace affine de dimension 3 muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  l'application qui au point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y', z')$  données par

$$\begin{cases} x' = y + z - 1 \\ y' = x + z - 1 \\ z' = x + y - 1 . \end{cases}$$

- 1 - Montrer que  $f$  est un automorphisme affine de  $E$ . Donner sa direction  $\vec{f}$ .
- 2 - Montrer que  $f$  admet un unique point fixe  $\omega$  que l'on déterminera.
- 3 - Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\vec{f}$ .
- 4 - Déterminer toutes les droites affines  $\mathcal{D}$  qui sont globalement invariantes par  $f$  *i.e.* vérifiant  $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ . Passent-elles toutes par un même point ? Si oui, déterminer ce point à l'aide de ses coordonnées. Sont-elles coplanaires ?
- 5 - Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine défini par une équation  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ . Donner une équation définissant le plan  $f^{-1}(\mathcal{P})$ .
- 6 - Déterminer tous les plans globalement invariants par  $f$ .
- 7 - Ces plans invariants passent-ils par une même droite ? Si oui, déterminer cette droite à l'aide de ses équations.

### Exercice 2

Soit  $\vec{E}$  un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On le munit de sa structure affine canonique.

1 - Donner explicitement (en usant d'une base de  $\vec{E}$ ) la forme générale d'une application affine  $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$ .

On note  $\text{Aff}(\vec{E})$  l'ensemble des applications affines bijectives de  $\vec{E}$  dans  $\vec{E}$ .

2 - Ecrire explicitement la loi de composition dans  $\text{Aff}(\vec{E})$ . Montrer que  $\text{Aff}(\vec{E})$  est un groupe qui contient le groupe  $\vec{T}$  des translations comme sous-groupe.

3 - On note  $G$  le sous-groupe de  $\text{Aff}(\vec{E})$  engendré par les éléments de la forme  $uvu^{-1}v^{-1}$  avec  $u, v \in \text{Aff}(\vec{E})$ . Montrer que  $G$  est égal à  $\vec{T}$ .

---

## Fiche 6

---

### Exercice 1

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{C}$  muni de sa structure canonique d'espace affine. On peut le voir comme espace complexe ou comme espace réel. On considère l'application  $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  définie par  $T(z) = uz + v\bar{z} + w$  où  $u, v$  et  $w$  sont des nombres complexes.

1 - Montrer que  $T$  est une application affine réelle. Déterminer sa direction.

2 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $u, v$  et  $w$  pour que  $T$  soit un automorphisme affine, une dilatation, une translation ou une homothétie.

3 - On note  $\mathcal{H}$  l'image réciproque de  $\{0\}$  par  $T$ . Caractériser  $\mathcal{H}$  suivant les valeurs de  $u, v$  et  $w$ .

### Exercice 2

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée  $X$ . C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (de dimension infinie). Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  ; on peut les écrire

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \quad \text{et} \quad Q(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m.$$

On pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k.$$

1 - Montrer que la somme ci-dessus existe et définit un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$ .

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}[X]$ . On note  $A^\perp$  l'*orthogonal* de  $A$  i.e. l'ensemble des éléments de  $\mathbb{R}[X]$  orthogonaux à  $A$ .

2 - Montrer que  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .

3 - On suppose que  $A$  est réduite à un seul polynôme  $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ . Montrer que  $A^\perp$  est un hyperplan vectoriel. Donner son équation explicite.

4 - On note  $\mathbb{R}_2[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On le munit du produit scalaire induit et d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère le triangle  $P_0P_1P_2$  dont les sommets sont

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X \quad \text{et} \quad P_2(X) = X^2.$$

Montrer que  $P_0P_1P_2$  est équilatéral. Calculer son aire. Calculer la distance de l'origine  $O$  à son centre de gravité  $G$ .

---

## Fiche 7

---

### Exercice 1

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 2 muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (les axes portant  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  seront notés respectivement  $Ox$  et  $Oy$ ). Soit  $A$  l'affinité orthogonale d'axe  $Ox$  et de rapport  $k \in \mathbb{R}^*$ .

1 - Soit  $\Gamma$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$ . Montrer que l'image par  $A$  du cercle  $\Gamma$  est une ellipse  $\Sigma$ . Déterminer ses foyers  $F$  et  $F'$  ainsi que son grand axe  $2a$ .

2 - On se donne deux points  $A$  et  $B$  du plan affine  $\mathcal{E}$  ; on suppose que  $A$  et  $B$  varient de façon à ce que  $A$  reste sur  $Ox$ ,  $B$  reste sur  $Oy$  et la distance  $AB$  soit constante. Soit  $M$  un point du segment  $[AB]$  tel que  $MA = a$  et  $MB = b$  ( $a$  et  $b$  étant des constantes strictement positives fixées telles que  $a \geq b$ ). Montrer que le lieu géométrique du point  $M$  est une ellipse  $\Sigma$  dont on déterminera les foyers  $F$  et  $F'$  et le grand axe  $2a$ .

### Exercice 2

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 2 muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On suppose que  $\mathcal{E}$  est orienté de façon à ce que la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  soit directe.

1 - Montrer que le groupe des isométries linéaires de  $\mathcal{E}$  et préservant l'orientation est isomorphe au groupe  $SO(2)$  des matrices de la forme :  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

2 - Montrer que le groupe  $\text{Iso}_+(\mathcal{E})$  des isométries affines de  $\mathcal{E}$  est isomorphe au produit semi-direct  $SO(2) \ltimes \vec{\mathcal{E}}$ .

### Exercice 3

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé. On suppose que  $\mathcal{E}$  est orienté de façon à ce que la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  soit directe. Soit  $f$  une isométrie linéaire de  $\mathcal{E}$  préservant l'orientation.

1 - Montrer que la matrice  $A$  de  $f$  par rapport à la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  vérifie  $AA^* = A^*A = I$  où  $A^*$  est la matrice adjointe de  $A$  et  $I$  la matrice identité. Quel est le déterminant de  $A$  ?

2 - Montrer qu'il existe une droite affine  $\mathcal{D}$  dont tous les points sont fixés par  $f$ .

3 - Montrer que le plan vectoriel  $\mathcal{H}$  orthogonal à  $\mathcal{D}$  est invariant par  $f$ .

4 - Montrer qu'il existe toujours une base orthonormée de  $\vec{\mathcal{E}}$  (direction de  $\mathcal{E}$ ) par rapport à laquelle la matrice de  $f$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

---

## Fiche 8

---

### Exercice 1

Soit  $(E, \vec{E})$  un espace affine euclidien. Soient  $A_1, \dots, A_k$  des points de  $E$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  des nombres réels. On appelle *fonction scalaire de Leibniz* associée au système de points pondérés  $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)\}$  la fonction  $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\ell(M) = \sum_{i=1}^k \alpha_i MA_i^2.$$

1 - On suppose  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ . Montrer qu'il existe un vecteur  $\vec{u}$  tel que, pour tous  $M, M' \in E$ , on ait :

$$\ell(M') = \ell(M) + 2\overline{MM'} \cdot \vec{u}.$$

2 - On suppose que la somme  $\sum_{i=1}^k \alpha_i$  est non nulle. Dans ce cas le système de points pondérés  $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)\}$  admet un barycentre  $G$ . Montrer que, pour tout  $M \in E$ , on a :

$$\ell(M) = \ell(G) + \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) MG^2.$$

3 - Désormais  $E$  sera un plan affine euclidien et  $k = 2$ . Les points  $A_1$  et  $A_2$  seront notés respectivement  $A$  et  $B$ . On se donne un nombre réel  $\tau$ . Utiliser les questions qui précèdent pour caractériser les ensembles suivants :

$$\{M \in E : MA^2 + MB^2 = \tau\}, \{M \in E : MA^2 - MB^2 = \tau\} \text{ et } \left\{ M \in E : \frac{MA}{MB} = \tau \right\}.$$

### Exercice 2

Soit  $(E, \vec{E})$  un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $F$  et  $F'$  deux points de  $E$  et  $a$  et  $c$  deux nombres réels strictement positifs. On suppose que  $FF' = 2c$ . On note  $\Sigma$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $MF + MF' = 2a$ .

1 - Donner une condition sur  $a$  et  $c$  pour que l'ensemble  $\Sigma$  ne soit pas vide. Construire un point  $M$  de cet ensemble.

2 - On note  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $F'$  et de rayon  $2a$ . Montrer que  $\Sigma$  est l'ensemble des centres des cercles passant par  $F$  et tangents intérieurement à  $(\Gamma)$ .

3 - On suppose que  $\omega$  est l'isobarycentre des points  $F$  et  $F'$  et que le vecteur  $\vec{i}$  est porté par la droite  $\mathcal{D}_{FF'}$ . Donner l'équation de  $\Sigma$ .

L'ensemble  $\Sigma$  s'appelle *ellipse de foyers  $F$  et  $F'$* .

### Exercice 3

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 2 muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On se donne une droite  $(\Delta)$  et un point  $F$  extérieur à cette droite. On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que la longueur  $MF$  soit égale à la distance de  $M$  à la droite  $(\Delta)$ .

1 - Construire géométriquement un point  $M$  de l'ensemble  $\mathcal{P}$ .

2 - Montrer que  $\mathcal{P}$  est aussi l'ensemble des centres des cercles passant par  $F$  et tangents à la droite  $(\Delta)$ .

3 - On suppose que l'origine  $O$  du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est le milieu du segment  $FH$  où  $H$  est la projection orthogonale de  $F$  sur  $(\Delta)$ , que  $\vec{i}$  est parallèle à  $(\Delta)$  et que l'ordonnée de  $F$  est  $p$  (où  $p$  est la distance de  $F$  à  $(\Delta)$ ). Quelle est l'équation de l'ensemble  $\mathcal{P}$ .

L'ensemble  $\mathcal{P}$  s'appelle *parabole* de foyer  $F$  et de directrice  $(\Delta)$ .

### Exercice 4

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 2 muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $F$  et  $F'$  deux points de  $\mathcal{E}$  et  $a$  et  $c$  deux nombres réels strictement positifs. On suppose que  $FF' = 2c$ . On note  $\Sigma$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $|MF - MF'| = 2a$ .

1 - Donner une condition sur  $a$  et  $c$  pour que l'ensemble  $\Sigma$  ne soit pas vide. Construire un point  $M$  de cet ensemble.

2 - On note  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $F'$  et de rayon  $2a$ . Montrer que  $\Sigma$  est l'ensemble des centres des cercles passant par  $F$  et tangents extérieurement à  $(\Gamma)$ .

3 - On suppose que  $O$  est le milieu du segment  $[FF']$  et que le vecteur  $\vec{i}$  est porté par la droite  $(FF')$ . Donner l'équation de  $\Sigma$ .

L'ensemble  $\mathcal{P}$  s'appelle *hyperbole* de foyers  $F$  et  $F'$ .

---

## Devoir surveillé - novembre 2003

---

### Exercice

Soit  $(E, \vec{E})$  un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $\lambda$  un paramètre réel. On note  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  le sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$  engendré par les vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  donnés comme suit :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 + 2\lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1 - Quel est l'ensemble  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles le sous-espace vectoriel  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  est un hyperplan (*i.e.* sous-espace vectoriel de dimension 2) ?

2 - Prenons  $\lambda \in \Lambda$ . Donner l'équation cartésienne de l'hyperplan affine  $\mathcal{H}_\lambda$  (*i.e.*  $\mathcal{H}_\lambda$  est un sous-espace affine de dimension 2) passant par le point  $A = (1, 1, 0)$  et de direction  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$ .

### Problème

Soit  $(E, \vec{E})$  un espace affine de dimension 3 sur le corps des réels  $\mathbb{R}$ . Soient  $O, A, B$  et  $C$  quatre points de  $E$  affinement indépendants ; ils définissent donc un repère cartésien  $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ .

1 - Dessiner l'enveloppe convexe  $\widehat{\Omega}$  de l'ensemble  $\Omega = \{A, B, C\}$ .

2 - Calculer les coordonnées cartésiennes du barycentre  $G$  des points  $A, B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{3}$ .

On note  $\mathcal{D}$  la droite passant par le point  $A = (1, 0, 0)$  et parallèle au vecteur  $\vec{OG}$ .

3 - Montrer qu'un point  $M$  est sur la droite  $\mathcal{D}$  si, et seulement si, ses coordonnées  $(x, y, z)$  vérifient simultanément deux équations affines :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0 \end{cases}$$

où  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  et  $\delta_2$  sont des réels que l'on déterminera.

Soit  $\lambda$  un paramètre réel. On note  $\mathcal{H}_\lambda$  l'ensemble des points  $M$  de  $E$  dont les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  vérifient l'équation affine :

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)x - \lambda(\lambda - 1)y - z - 2\lambda = 0.$$

4 - Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{H}_\lambda$  est un hyperplan affine de  $E$ .

5 - Montrer que tous les hyperplans affines  $\mathcal{H}_\lambda$  passent par un point  $M_0$  indépendant de  $\lambda$  et dont on déterminera les coordonnées cartésiennes  $(x_0, y_0, z_0)$ .

6 - Quelle est l'intersection de  $\mathcal{H}_\lambda$  avec la droite  $\mathcal{D}$  ? (Il faut bien entendu discuter suivant les valeurs du paramètre  $\lambda \in \Lambda$ .)

---

## Corrigé

---

### Exercice

1 - Si  $\lambda = 0$ , on a  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$  ; ces deux vecteurs sont clairement linéairement indépendants. Supposons  $\lambda \neq 0$ . Alors  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont linéairement dépendants si, et seulement si on a :

$$\frac{1}{-\lambda} = \frac{\lambda}{-1} = \frac{1+2\lambda}{-3}.$$

Cette “double équation” a une solution unique :  $\lambda = 1$ . Donc  $\Lambda = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$  i.e.  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  est un hyperplan vectoriel si, et seulement si,  $\lambda \neq 1$ .  $\diamond$

2 - Soit  $\lambda \in \Lambda$ . Un point  $M$  de  $E$  est sur l'hyperplan  $\mathcal{H}_\lambda$  si, et seulement si, le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  appartient à l'hyperplan vectoriel  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  i.e. les vecteurs :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1+2\lambda \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants ; leur déterminant (qui n'est rien d'autre que celui de la matrice donnée par leurs composantes respectives) est donc nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & x-1 \\ \lambda & -1 & y-1 \\ 1+2\lambda & -3 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Pour développer plus facilement ce déterminant, on remplace la première colonne par la somme de la première colonne et la seconde colonne ; sa valeur ne change pas. Ceci donne l'équation  $(1-\lambda)(x+(2\lambda+3)y-(\lambda+1)z-2(\lambda+2)) = 0$ . Comme  $\lambda \neq 1$ , on peut simplifier par  $(1-\lambda)$  pour obtenir finalement l'équation cartésienne de l'hyperplan affine  $\mathcal{H}_\lambda$  :

$$x + (2\lambda + 3)y - (\lambda + 1)z - 2(\lambda + 2) = 0.$$

### Problème

1 - L'enveloppe convexe de  $\Omega = \{A, B, C\}$  est le triangle contenu dans le plan défini par les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  et dont les sommets sont précisément ces points.

2 - Soient  $a, b$  et  $c$  les coordonnées du point  $G$  isobarycentre des points  $A, B$ , et  $C$ . Comme  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ , un calcul simple donne  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .  $\diamond$

3 - Un point  $M$  de  $E$  est sur la droite  $\mathcal{D}$  si, et seulement si, les vecteurs  $\overrightarrow{OG}$  et  $\overrightarrow{AM}$  sont colinéaires *i.e.* il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{OG}$ . Ceci donne, au niveau des coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité est équivalente au système qui suit dont les équations sont affines et sont exactement celles qu'on cherche :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

4 - L'ensemble  $\mathcal{H}_\lambda$  est le noyau de la forme affine  $f_\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f_\lambda(x, y, z) = (\lambda^2 + \lambda + 1)x - \lambda(\lambda - 1)y - z - 2\lambda.$$

Comme, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f_\lambda$  est non constante,  $\mathcal{H}_\lambda$  est un hyperplan affine de direction l'hyperplan vectoriel d'équation  $(\lambda^2 + \lambda + 1)x - \lambda(\lambda - 1)y - z = 0$ .  $\diamond$

5 - Un point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  appartient à tous les hyperplans  $\mathcal{H}_\lambda$  si, et seulement si, l'équation qui suit :

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)x_0 - \lambda(\lambda - 1)y_0 - z_0 - 2\lambda = 0$$

est satisfaite pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  ; ceci est encore équivalent à dire que le polynôme du second degré  $P(\lambda) = (x_0 - y_0)\lambda^2 + (x_0 + y_0 - 2)\lambda + (x_0 - z_0)$  est identiquement nul et donc tous ses coefficients sont nuls. Ceci donne le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 = 0 \\ x_0 + y_0 = 2 \\ x_0 - z_0 = 0. \end{cases}$$

Ce système a une solution unique :  $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ .  $\diamond$

6 - Un point  $M$  est à la fois sur l'hyperplan  $\mathcal{H}_\lambda$  et sur la droite  $\mathcal{D}$  si, et seulement si, ses coordonnées  $(x, y, z)$  vérifient simultanément les équations :

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y - z &= 0 \\ (\lambda^2 + \lambda + 1)x - \lambda(\lambda - 1)y - z &= 2\lambda \end{aligned}$$

En remplaçant  $z$  par  $y$  dans la troisième équation, on obtient un système de deux équations à deux inconnues  $x$  et  $y$  :

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ (\lambda^2 + \lambda + 1)x + (-\lambda^2 + \lambda - 1)y &= 2\lambda. \end{aligned}$$

Si  $\lambda = 0$ , le système n'a pas de solution et donc  $\mathcal{D}$  est faiblement parallèle à  $\mathcal{H}_0$  et n'y est pas contenue ; si  $\lambda \neq 0$ , il y a une solution unique  $x = \frac{-\lambda^2 + 3\lambda - 1}{2\lambda}$  et  $y = z = \frac{-\lambda^2 + \lambda - 1}{2\lambda}$  *i.e.* l'intersection de  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{H}_\lambda$  est réduite au point  $M_0 = \left( \frac{-\lambda^2 + 3\lambda - 1}{2\lambda}, \frac{-\lambda^2 + \lambda - 1}{2\lambda}, \frac{-\lambda^2 + \lambda - 1}{2\lambda} \right)$ .  $\diamond$

---

## Examen (deuxième session) - Mars 2003

DOCUMENTS NON AUTORISÉS

---

### Exercice 1

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure affine canonique. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f_\lambda$  l'application  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$f_\lambda(x, y, z) = (\lambda x + y + 2z - 1, (1 + \lambda^2)x + \lambda y + 6z - 3).$$

1 - Vérifier que  $f_\lambda$  est une application affine. Quelle est sa direction  $\vec{f}_\lambda$  ?

Pour chaque valeur de  $\lambda$ , on notera  $\mathcal{D}_\lambda$  le noyau de  $f_\lambda$ .

2 - Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D}_\lambda$  est une droite affine.

3 - Montrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_\lambda$  passent par un point unique  $\omega$  dont on déterminera les coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ .

### Exercice 2

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée  $X$ . C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (de dimension infinie) ; on le munit de sa structure affine canonique. Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  ; on peut les écrire :  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  et  $Q(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m$ . (Un polynôme est vu comme la suite de ses coefficients. Bien entendu, ces derniers sont nuls à partir d'un certain rang.) On pose :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k.$$

1 - Montrer que la somme ci-dessus existe et définit un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$ .

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}[X]$  ; on note  $A^\perp$  son *orthogonal i.e.* l'ensemble des éléments  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $\langle P, Q \rangle = 0$  pour tout  $P \in A$ .

2 - Montrer que  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .

3 - On suppose que  $A$  est réduite au seul polynôme  $P(X) = 1 + X + \dots + X^n$ . Montrer que  $A^\perp$  est un hyperplan vectoriel. Soit  $Q(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m$  un élément de  $\mathbb{R}[X]$ . Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients  $b_0, \dots, b_m$  pour que  $Q$  appartienne à  $A^\perp$ .

4 - Soit  $V$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On le munit du produit scalaire induit. On considère le triangle  $P_0P_1P_2$  dont les sommets sont :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X \quad \text{et} \quad P_2(X) = X^2.$$

Montrer que  $P_0P_1P_2$  est équilatéral. Calculer la distance de son centre de gravité  $G$  à l'origine  $O$  de  $V$  (qui n'est rien d'autre que le vecteur nul).

---

## Examen - Janvier 2003

DOCUMENTS NON AUTORISÉS

---

Dans tout ce qui suit *espace affine euclidien* signifie espace affine réel de dimension finie  $(E, \vec{E})$  muni d'un produit scalaire  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$ . La distance entre deux points  $M, N \in E$  (qui est aussi la norme  $\|\vec{MN}\|$  du vecteur  $\vec{MN}$  ou la longueur du segment  $[MN]$ ) sera notée  $MN$ . Par *droite* et *plan* on entendra respectivement *droite affine* et *plan affine*. Si  $M$  et  $N$  sont deux points distincts de  $E$ , la droite qu'ils définissent sera notée  $(MN)$ . Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux nombres réels avec  $\mu \neq 0$ , le rapport  $\frac{\lambda}{\mu}$  sera noté parfois  $\lambda : \mu$  ( $\lambda$  divisé par  $\mu$ ).

### Exercice 1

Soit  $(E, \vec{E})$  un espace affine euclidien de dimension 3. On le munit d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $A$  le point de  $E$  de coordonnées cartésiennes  $(-1, 2, 0)$  et  $\vec{u}$  le vecteur  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

- 1 - Donner les équations cartésiennes de la droite  $\mathcal{D}$  de direction  $\vec{u}$  et passant par  $A$ .
- 2 - Donner l'équation cartésienne du plan  $\mathcal{H}$  passant par le point  $B = (0, 0, 5)$  et orthogonal à la droite  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 2

Soit  $(E, \vec{E})$  un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $\mathcal{D}$  la droite d'équation cartésienne  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels (avec l'un des deux au moins non nul) et  $M$  un point de  $E$  de coordonnées  $(a, b)$ .

- 1 - Montrer qu'il existe une unique droite  $\mathcal{D}^\perp$  orthogonale à  $\mathcal{D}$  et passant par  $M$ .
- 2 - Soit  $M_0$  l'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^\perp$ . Déterminer les coordonnées  $(a_0, b_0)$  de  $M_0$  en fonction de celles de  $M$ . (Le point  $M_0$  est la *projection orthogonale* de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .)

### Problème

Soit  $(E, \vec{E})$  un espace affine euclidien de dimension 2.

- 1 - Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $E$ . On se donne un nombre  $k \in \mathbb{R}_+$ . Déterminer, suivant les valeurs de  $k$ , tous les points  $M$  de la droite  $(AB)$  tels que  $\frac{MA}{MB} = k$ .

On appelle *birapport* de quatre points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  alignés (on les supposera distincts deux à deux) pris dans cet ordre, le nombre  $(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} : \frac{\overline{A_4A_1}}{\overline{A_4A_2}}$ . On dira que les quatre points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  forment une *division harmonique* si  $(A_1, A_2, A_3, A_4) = -1$  ; on dira aussi que  $A_3$  et  $A_4$  sont *conjugués harmoniques* par rapport à  $A_1$  et  $A_2$  (et donc aussi  $A_1$  et  $A_2$  le sont par rapport à  $A_3$  et  $A_4$  comme on peut le constater aisément).

**1 bis - Question facultative mais à un million d'euros !**

Il est clair que le birapport de quatre points alignés  $A_1, A_2, A_3, A_4$  dépend de l'ordre dans lequel on les écrit. Notons  $\Sigma_4$  le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$  ; pour tout  $\sigma \in \Sigma_4$ , on pose :  $\rho_\sigma = (A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}, A_{\sigma(4)})$ .

Déterminer toutes les valeurs possibles de la fonction  $\varphi : \sigma \in \Sigma_4 \mapsto \rho_\sigma \in \mathbb{R}$  en fonction de  $\rho = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ . (Il y en a 6 au plus.)

Soient maintenant  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  des droites (on les supposera distinctes deux à deux) de  $E$  formant un *faisceau i.e.* elles sont parallèles entre elles ou toutes concourantes en un point  $O$ .

Soit  $\mathcal{D}$  une droite coupant  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  respectivement en  $A_1, A_2, A_3, A_4$ .

2 - On suppose  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  parallèles. Montrer que le nombre  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  ne dépend pas de la sécante  $\mathcal{D}$ .

Dans les questions 3, 4 et 5 qui suivent, on suppose que  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  concourent en un point  $O$ . Par le point  $A_2$  on mène la parallèle à  $\mathcal{D}_1$ .

3 - Dire pourquoi cette parallèle coupe les droites  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$  chacune en un point. On notera  $G$  et  $F$  ses points d'intersection respectivement avec  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$ .

4 - Montrer que le birapport  $(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} : \frac{\overline{A_4A_1}}{\overline{A_4A_2}}$  est égal à  $\frac{\overline{A_2F}}{\overline{A_2G}}$ .

Indication : remarquer que les triangles  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_4$  sont homothétiques respectivement aux triangles  $GA_2A_3$  et  $FA_2A_4$ .

5 - Montrer que le nombre  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  est indépendant de la sécante  $\mathcal{D}$ .

Le nombre  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$ , qui ne dépend que des droites  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  prises dans cet ordre (qu'elles soient parallèles ou concourantes) et non de la sécante  $\mathcal{D}$  qui permet de le définir, est appelé *birapport* du faisceau  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  et est noté  $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4)$ . Le faisceau  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  est dit *harmonique* si  $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4) = -1$ .

Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites distinctes et  $P$  un point de  $E$  n'appartenant à aucune de ces droites. Pour tout point  $M$  de  $E$ ,  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$  seront :

- les droites parallèles à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  passant respectivement par  $P$  et  $M$  si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont elles-mêmes parallèles ;

- respectivement les droites  $(OP)$  et  $(OM)$  si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  se coupent en un point  $O$ .

On dira que  $M$  est un *conjugué harmonique* de  $P$  par rapport à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  si le faisceau  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  est harmonique. On fixe  $P$ .

6 - Montrer que l'ensemble des points  $M$  conjugués harmoniques de  $P$  par rapport à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est une droite  $\Delta$  :

- parallèle à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  lorsque  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont parallèles ;

- passant par  $O$  lorsque  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  se coupent en  $O$ .

On dira que  $\Delta$  est la *polaire* de  $P$  par rapport à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

7 - Dans tous les cas, construire géométriquement  $\Delta$ .

## Devoir surveillé - novembre 2003

---

### Exercice 1

On note  $\vec{\mathcal{E}}$  l'espace vectoriel des fonctions continues  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ . On le munit de sa structure affine canonique.

1 - Montrer que  $\vec{\mathcal{E}}$  est de dimension infinie. (*Indication* : observer qu'il contient toutes les fonctions polynômes.)

Soit  $\lambda$  un nombre réel. On considère la partie  $\mathcal{H}_\lambda$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  donnée par

$$\mathcal{H}_\lambda = \left\{ f \in \vec{\mathcal{E}} : \int_0^1 f(x)dx + \lambda(f(0) + 1) = 0 \right\}.$$

2 - Montrer que  $\mathcal{H}_\lambda$  est un sous-espace affine. Quelle est sa direction  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  ?

3 - Montrer que, pour tout  $\lambda$ ,  $\mathcal{H}_\lambda$  est un hyperplan vectoriel de  $\vec{\mathcal{E}}$  *i.e.* admet un supplémentaire  $\vec{\mathcal{W}}$  de dimension 1 qu'on précisera.

On suppose maintenant que  $\vec{\mathcal{E}}$  est l'espace des fonctions polynômes de degré 2 *i.e.* de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

où  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont des nombres réels.

4 - Donner une équation cartésienne explicite définissant l'hyperplan affine  $\mathcal{H}_\lambda$ .

5 - Pour chaque  $\lambda$ , donner une base de l'espace vectoriel  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$ .

6 - Montrer que les hyperplans affines  $\mathcal{H}_\lambda$  passent par une droite fixe  $\mathcal{D}$  (indépendante de  $\lambda$ ) qu'on déterminera.

### Exercice 2

Soit  $\vec{\mathcal{E}}$  un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On le munit de sa structure affine canonique.

1 - Donner explicitement (en usant d'une base de  $\vec{\mathcal{E}}$ ) la forme générale d'une application affine  $\vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$ .

On note  $\text{Aff}(\vec{\mathcal{E}})$  l'ensemble des applications affines bijectives de  $\vec{\mathcal{E}}$  dans  $\vec{\mathcal{E}}$ .

2 - Ecrire explicitement la loi de composition dans  $\text{Aff}(\vec{\mathcal{E}})$ . Montrer que  $\text{Aff}(\vec{\mathcal{E}})$  est un groupe et qu'il contient le groupe  $\vec{\mathcal{T}}$  des translations comme sous-groupe.

3 - On note  $G$  le sous-groupe de  $\text{Aff}(\vec{\mathcal{E}})$  engendré par les éléments de la forme  $uvu^{-1}v^{-1}$  avec  $u, v \in \text{Aff}(\vec{\mathcal{E}})$ . Montrer que  $G$  est égal à  $\vec{\mathcal{T}}$ .

4 - *Question facultative.* Montrer que le groupe  $\text{Aff}(\vec{\mathcal{E}})$  est résoluble.

---

## Corrigé

---

### Exercice 1

1 - L'espace vectoriel  $\vec{E}$  est de dimension infinie : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, \dots, f_n(x) = x^n$  appartiennent à  $\vec{E}$  et forment un système libre. A cet soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  des réels tels que  $\alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_n f_n = 0$  i.e. pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0$  ; le polynôme  $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$  a donc une infinité de racines ; ceci ne peut avoir lieu que si  $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$ .

2 - L'application  $\Phi_\lambda : f \in \vec{E} \mapsto \left( \int_0^1 f(x) dx + \lambda(f(0) + 1) \right) \in \mathbb{R}$  est une forme affine. En effet, soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que  $\alpha + \beta = 1$ . On a :

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\alpha f + \beta g) &= \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x) dx + \lambda((\alpha f + \beta g)(0) + 1) \\ &= \int_0^1 \alpha f(x) dx + \int_0^1 \beta g(x) dx + \alpha \lambda f(0) + \beta \lambda g(0) + \lambda(\alpha + \beta) \\ &= \alpha \int_0^1 f(x) dx + \alpha \lambda (f(0) + 1) + \beta \int_0^1 g(x) dx + \beta \lambda (g(0) + 1) \\ &= \alpha \Phi_\lambda(f) + \beta \Phi_\lambda(g). \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{H}_\lambda$  est un sous-espace affine de  $\vec{E}$ . Sa direction  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$  que l'on va déterminer.

3 - La direction de  $\Phi_\lambda$  est l'application linéaire  $\vec{\Phi}_\lambda : f \in \vec{E} \mapsto \int_0^1 f(x) dx + \lambda f(0) \in \mathbb{R}$ . Elle est non nulle ; en effet on a  $\vec{\Phi}_\lambda(f_0) = 1$  avec  $f_0(x) = 2x$ . Son noyau  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  est donc un hyperplan vectoriel de  $\vec{E}$ .

Soit  $\vec{W}$  le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par  $f_0$ . Alors un vecteur  $\alpha f_0$  de  $\vec{W}$  n'appartient à  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  que si  $\alpha = 0$  ; donc  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda \cap \vec{W} = \{0\}$ . Tout vecteur  $f \in \vec{E}$  s'écrit  $f = h + w$  où  $h = (f - \Phi_\lambda(f)f_0) \in \vec{\mathcal{H}}_\lambda$  et  $w = \Phi_\lambda(f)f_0 \in \vec{W}$ . Donc  $\vec{E}$  est la somme directe de  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  et de  $\vec{W}$ .

4 - Les nombres  $a_0, a_1$  et  $a_2$  sont les coordonnées d'un vecteur (ou point) quelconque de  $\vec{E}$  dans la base  $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$  (ou le repère  $(0, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ ) avec  $\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1 = x$  et  $\vec{e}_3 = x^2$ . Si  $f \in \vec{E}$  avec  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ , on a

$$\Phi_\lambda(f) = \int_0^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) dx + \lambda(a_0 + 1) = (\lambda + 1)a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{3} + \lambda.$$

L'équation de  $\mathcal{H}_\lambda$  est donc

$$(\lambda + 1)a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{3} + \lambda = 0$$

et celle qui définit  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  est

$$(\lambda + 1)a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{3} = 0.$$

5 - Il est facile de voir que les vecteurs

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\lambda \\ -3 \end{pmatrix}$$

sont dans  $\vec{\mathcal{H}}_\lambda$  et en forment une base.

6 - L'équation de  $\mathcal{H}_\lambda$  s'écrit aussi sous la forme

$$(a_0 + 1)\lambda + a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 0.$$

Elle est vérifiée pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  si, et seulement si

$$\begin{cases} a_0 + 1 = 0 \\ a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 0. \end{cases}$$

La droite cherchée a donc pour équations  $a_0 = -1$  et  $3a_1 + 2a_2 = 6$ .

## Exercice 2

1 - Montrons l'associativité de cette loi de composition interne. Soient  $(a, b)$ ,  $(a', b')$  et  $(a'', b'')$  des éléments de  $G$ . On a

$$\begin{aligned} (a'', b'') \cdot \{(a', b') \cdot (a, b)\} &= (a'', b'') \cdot (a'a, a'b + b') \\ &= (a''(a'a), a''(a'b + b') + b'') \\ &= ((a''a')a, (a''a')b + (a''b' + b'')) \\ &= \{(a'', b'') \cdot (a', b')\} \cdot (a, b). \end{aligned}$$

Il est évident que  $e = (1, 0)$  est élément neutre pour cette loi et que l'inverse  $(a, b)^{-1}$  de tout élément  $(a, b)$  est l'élément  $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ . Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  tel que  $a \neq 1$ . Alors  $(a, 0) \cdot (1, 1) = (a, a)$  qui est différent de  $(1, 1) \cdot (a, 0) = (a, 1)$ , donc  $G$  n'est pas abélien.

2 - Soient  $(1, b)$  et  $(1, b')$  deux éléments de  $T$  ; alors  $(1, b') \cdot (1, b)^{-1} = (1, b' - b)$  est encore dans  $T$ , donc  $T$  est un sous-groupe de  $G$ . De même, soient  $(a, 0)$  et  $(a', 0)$  deux éléments de  $H$  ; alors  $(a', 0) \cdot (a, 0)^{-1} = (\frac{a'}{a}, 0)$  est encore un élément de  $H$ , donc  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

Soient  $(a, b) \in G$  et  $(1, c) \in T$ . Alors  $(a, b)^{-1} \cdot (1, c) \cdot (a, b) = (1, \frac{c}{a})$  qui est encore un élément de  $T$ . Le sous-groupe  $T$  reste stable lorsque on le conjugue par tout élément de  $G$ , il est donc normal dans  $G$ .

Il est clair que  $G$  est engendré par  $T$  et  $H$  car  $(a, b) = (a, 0) \cdot (1, \frac{b}{a})$  et que l'intersection de  $T$  et  $H$  est réduite au seul élément neutre  $e = (1, 0)$  ; comme en plus  $T$  est normal,  $G$  est bien le produit semi-direct de  $T$  par  $H$ .

3 - Soient  $f : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$  une application affine et  $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$  sa direction. Alors, pour tout  $x \in \overrightarrow{E}$  (vu comme point) on a  $x = O + \overrightarrow{Ox} = O + x\overrightarrow{e}$  et  $f(x) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{Ox}) = f(O) + x\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e})$  ( $x$  est vu comme nombre). On prend  $b = f(O)$  (vu comme nombre) et  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}) = a\overrightarrow{e}$ . Il est clair que  $\overrightarrow{f}$  est un automorphisme linéaire si, et seulement si,  $a \neq 0$  ; donc  $f$  est un automorphisme affine si, et seulement si,  $a \neq 0$ . L'application  $f$  s'écrit alors  $f(x) = ax + b$ .

4 - L'application  $\Phi$  est bijective. En effet, soit  $(a, b) \in G$  ; alors, la base  $\overrightarrow{e}$  de  $\overrightarrow{E}$  étant fixée,  $a$  détermine, de façon unique, une application linéaire  $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$  définie par  $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}) = a\overrightarrow{e}$  ; pour tout  $x \in E$ , on pose  $f(x) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{Ox}) + b$ . On définit ainsi une unique application affine  $f$  telle que  $\Phi(f) = (a, b)$ . Donc  $\Phi$  est bijective.

Le fait que  $\Phi$  soit un homomorphisme est immédiat. En effet, soient  $(a, b)$  et  $(a', b')$  des éléments du groupe  $G$  ; on a

$$\begin{aligned} (f' \circ f)(x) &= f'(f(x)) \\ &= f'(ax + b) \\ &= a'(ax + b) + b' \\ &= (a'a)x + (a'b + b'). \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\Phi(f' \circ f) = \Phi(f') \cdot \Phi(f)$ . Comme l'application  $\Phi$  est aussi bijective, c'est un isomorphisme de  $\text{Aff}(E)$  sur  $G$ .

---

## Examen de première session - janvier 2004

---

### Exercice 1

Soit  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure affine canonique. Soient  $\lambda$  un nombre réel et  $\Phi_\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application affine définie par :

$$\Phi_\lambda(x, y, z) = (2x + (\lambda + 1)y + (3 - \lambda)z - 2, x + (2 - \lambda)y + z - 1).$$

On note  $\mathcal{H}_\lambda$  le sous-espace affine  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi_\lambda(x, y, z) = 0\}$ .

1 - Déterminer, suivant les valeurs de  $\lambda$ , le sous-espace affine  $\mathcal{H}_\lambda$ .

2 - Montrer que tous les sous-espaces  $\mathcal{H}_\lambda$  passent par un point indépendant de  $\lambda$  qu'on précisera.

Dans les trois exercices qui suivent,  $E$  sera un espace affine euclidien de dimension 2. On parlera simplement du plan  $E$ . La distance entre deux points  $M$  et  $N$  (qui est aussi la norme  $\|\overrightarrow{MN}\|$  du vecteur  $\overrightarrow{MN}$ ) sera notée  $MN$ .

### Exercice 2

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $E$  et  $\ell$  un nombre réel strictement positif. Deux points  $M$  et  $N$  varient dans  $E$  mais de façon que le quadrilatère (convexe)  $ABNM$  soit un parallélogramme et que la distance de  $M$  à  $A$  reste constante égale à  $\ell$ .

Quels sont les lieux géométriques  $\mathcal{L}_M$  et  $\mathcal{L}_N$  respectivement de  $M$  et  $N$ .

### Exercice 3

Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux droites affines distinctes de  $E$  et  $e$  un nombre réel strictement positif. Pour tout point  $M$  de  $E$ , on note  $K$  et  $L$  ses projections orthogonales respectivement sur  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

Montrer que l'ensemble des points  $M$  qui vérifient  $MK = e \cdot ML$  est constitué de deux droites :

- i) parallèles à  $\Delta$  et  $\Delta'$  si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont parallèles ;
- ii) passant par le point d'intersection de  $\Delta$  et  $\Delta'$  si  $\Delta$  et  $\Delta'$  se coupent.

### Exercice 4

Soit  $\Delta$  une droite du plan. On appelle *symétrie axiale* relativement à l'axe  $\Delta$  l'application affine  $S_\Delta : E \rightarrow E$  qui à  $M$  associe le point  $M'$  tel que  $\Delta$  soit la médiatrice du segment  $[MM']$ .

1 - Montrer que  $S_\Delta$  est une transformation involutive *i.e.* vérifie  $S_\Delta \circ S_\Delta = \text{id}_E$ .

2 - Soient  $S_\Delta$  et  $S_{\Delta'}$  deux symétries d'axes respectifs  $\Delta$  et  $\Delta'$ . Montrer que leur composée  $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$  est :

- i) une translation (dont on précisera le vecteur) si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont parallèles ;
- ii) une rotation (dont on précisera le centre et l'angle) si  $\Delta$  et  $\Delta'$  se coupent en  $\omega$ .

3 - Montrer qu'une translation est toujours la composée de deux symétries axiales. Même question pour une rotation. Dans les deux cas, la décomposition est-elle unique ?

---

## Devoir surveillé - novembre 2004

---

### Questions de cours

Soient  $E$  un ensemble,  $\vec{E}$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $\Phi : E \times E \longrightarrow \vec{E}$  une application.

1 - Quelles sont les propriétés que doit satisfaire  $\Phi$  pour conférer au couple  $(E, \vec{E})$  une structure d'espace affine ?

2 - Soient  $(E, \vec{E})$  et  $(F, \vec{F})$  deux espaces affines et  $f : E \longrightarrow F$  une application. Quand dit-on que  $f$  est affine ? Qu'appelle-t-on direction de  $f$  ? (La direction de  $f$  est une application linéaire  $\vec{f} : \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$ .)

3 - Montrer qu'une application affine  $f : E \longrightarrow F$  est bijective si, et seulement si,  $\vec{f}$  l'est.

### Exercice 1

On munit les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$  de leurs structures affines canoniques respectives. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  l'application affine définie par :

$$f_\lambda(x, y, z) = ((2 - \lambda^2)x + y - z - 3, (2 - \lambda)x + \lambda y + (2\lambda - 3)z - 3).$$

On note  $\mathcal{D}_\lambda$  le sous-espace affine  $f_\lambda^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_\lambda(x, y, z) = 0\}$ .

1 - Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le sous-espace  $\mathcal{D}_\lambda$  est une droite affine sauf pour une seule valeur  $\lambda_0$  que l'on déterminera. Donner un vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{D}_\lambda$ .

2 - Dire explicitement et en justifiant ce qu'est  $\mathcal{D}_{\lambda_0}$ .

3 - Montrer que tous les sous-espaces affines  $\mathcal{D}_\lambda$  passent par un point  $\omega$  indépendant de  $\lambda$  et dont on déterminera les coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ .

### Exercice 2

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  de sa structure affine canonique. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $A, B$  et  $C$  respectivement les trois points  $(\lambda, 1 - \lambda^2, 0)$ ,  $(\lambda, 1, -\lambda^2)$  et  $(0, 1 - \lambda^2, \lambda)$ .

1 - Quel est l'ensemble  $\Lambda$  des valeurs  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour lesquelles les points  $A, B$  et  $C$  engendrent un plan affine  $\mathcal{P}_\lambda$  ? Montrer que sa direction  $\vec{\mathcal{P}}_\lambda$  est indépendante de  $\lambda \in \Lambda$ . Donner une équation cartésienne définissant  $\mathcal{P}_\lambda$ .

2 - Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , déterminer le barycentre  $G$  des points  $A, B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{4}$ .

3 - Pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les points  $O, A, B$  et  $G$  forment-ils un repère affine ? Pour ces valeurs, déterminer les coordonnées barycentriques du point  $C$  dans ce repère.

### Exercice 3

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  de sa structure affine canonique. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $A, B$  et  $C$  respectivement les trois points de coordonnées respectives  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  et  $(0, 0, c)$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels.

Donner un système d'équations cartésiennes définissant le sous-espace affine engendré par les points  $A, B$  et  $C$ .

---

## Examen - janvier 2005

---

### Exercice 1

Soit  $(E, \vec{E})$  un plan affine euclidien. On se donne quatre points distincts  $A, B, C$  et  $D$  dans  $E$  tels que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  soient parallèles et non confondues.

Montrer que les quatre points  $A, B, C$  et  $D$  sont sur un même cercle si, et seulement si, les segments  $[AB]$  et  $[CD]$  ont même médiatrice.

### Exercice 2

On munit l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$  de sa structure affine canonique et de son produit scalaire usuel (*i.e.*  $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' + zz'$ ).

1 - Donner une équation cartésienne du plan affine  $\mathcal{H}$  engendré par les trois points  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  et  $C = (0, 0, 1)$ .

On note  $\pi : M = (x, y, z) \in E \mapsto M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}$  la projection orthogonale de  $E$  sur le sous-espace affine  $\mathcal{H}$ .

2 - Calculer  $(x_0, y_0, z_0)$  en fonction de  $(x, y, z)$ .

3 - Soit  $\Gamma$  le cercle d'équations cartésiennes  $z = 0$  et  $x^2 + y^2 = 1$ . Donner des équations cartésiennes de l'ensemble  $\mathcal{E}$  image de  $\Gamma$  par la projection  $\pi$ .

### Exercice 3

On munit l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^2$  de sa structure affine canonique et de son produit scalaire usuel. Soit  $\Delta$  une droite vectorielle. On appelle *symétrie* d'axe  $\Delta$  l'application  $S_\Delta : M \in E \mapsto M' \in E$  telle que  $\Delta$  soit la médiatrice du segment  $[MM']$ .

1 - Montrer qu'on peut choisir une équation cartésienne définissant  $\Delta$  de la forme  $ax + by = 0$  où  $a$  et  $b$  sont des réels vérifiant  $a^2 + b^2 = 1$ .

2 - On supposera  $\Delta$  définie par l'équation de la question qui précède. Calculer les coordonnées  $(x', y')$  de  $M'$  en fonction des coordonnées  $(x, y)$  de  $M$ .

### Exercice 4

Soit  $(E, \vec{E})$  un plan affine euclidien. Soient  $S$  un point de  $E$  et  $k$  un nombre réel strictement positif. A tout point  $M$  de  $E$  différent de  $S$  on associe le point  $M'$  de la droite  $(SM)$  tel que  $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SM'} = k$ . On obtient ainsi une application  $I(S, k) : E \setminus \{S\} \rightarrow E$  qu'on appelle *inversion* de pôle  $S$  et de *puissance*  $k$ . On dira que  $M'$  est l'*inverse* de  $M$  (sous-entendu par  $I(S, k)$ ).

1 - Montrer que  $I(S, k)$  est une bijection de  $E \setminus \{S\}$  sur lui-même.

2 - Quel est l'ensemble des points fixes de  $I(S, k)$  ?

Soit  $\Delta$  une droite ne passant pas par  $S$ . On note  $H$  la projection orthogonale de  $S$  sur  $\Delta$  et  $H'$  l'image de  $H$  par  $I(S, k)$ . Soit  $M \in \Delta$  distinct de  $H$  d'inverse  $M'$ .

3 - Montrer que les quatre points  $M, M', H'$  et  $H$  sont sur un même cercle.

4 - Quelle est l'image de la droite  $\Delta$  par l'inversion  $I(S, k)$  ?

### Exercice 1

Dans un plan affine euclidien  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}})$ , on se donne un triangle non dégénéré  $A_1A_2A_3$  (*i.e.* les trois sommets ne sont pas alignés). Soient  $a_1, a_2$  et  $a_3$  les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets  $A_1, A_2$  et  $A_3$ . Le point de concours  $H$  des droites  $(A_1a_1)$ ,  $(A_2a_2)$  et  $(A_3a_3)$  est l'orthocentre du triangle  $A_1A_2A_3$ . On note  $(\Gamma_1)$  le cercle passant par  $A_1, a_2, a_3$ ,  $(\Gamma_2)$  celui passant par  $A_2, a_1, a_3$ , et  $(\Gamma_3)$  celui passant par  $A_3, a_1, a_2$ . Soient  $H_1, H_2$  et  $H_3$  les symétriques de  $H$  respectivement par rapport aux droites  $(A_2A_3)$ ,  $(A_1A_3)$  et  $(A_1A_2)$ .

1 - Dessiner une figure CLAIRE avec tous les objets géométriques introduits.

2 - Montrer que les cercles  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  et  $(\Gamma_3)$  passent tous les trois par le point  $H$ . (On se contentera de faire le raisonnement pour  $(\Gamma_1)$ .)

3 - Montrer que les points  $H_1, H_2$  et  $H_3$  sont sur le cercle  $(\Gamma)$  circonscrit au triangle  $A_1A_2A_3$ . (On se contentera de faire le raisonnement pour  $H_1$ .)

Dans toute la suite, le centre du cercle  $(\Gamma)$  sera noté  $O$ , c'est le point de concours des médiatrices du triangle  $A_1A_2A_3$ ;  $A'_1, A'_2$  et  $A'_3$  seront les milieux respectifs des segments  $[A_2A_3]$ ,  $[A_1A_3]$  et  $[A_1A_2]$  et  $G$  le centre de gravité du triangle  $A_1A_2A_3$ .

4 - Montrer que le triangle  $A'_1A'_2A'_3$  est le transformé de  $A_1A_2A_3$  par une homothétie  $\beta$  dont on déterminera le centre et le rapport.

5 - Montrer que l'image de  $H$  par l'homothétie  $\beta$  est le point  $O$ . En déduire que les points  $G, O$  et  $H$  sont alignés.

Soit  $(\mathcal{E})$  le cercle de centre  $\omega$  transformé de  $(\Gamma)$  par  $\beta$ . Bien sûr, il passe par  $A'_1, A'_2$  et  $A'_3$ .

6 - Montrer que  $\vec{HO} = 2\vec{H\omega}$ .

7 - Montrer que les trois points  $a_1, a_2, a_3$  sont sur le cercle  $(\mathcal{E})$ . (On se contentera de faire le raisonnement pour  $a_1$ .)

### Exercice 2

On munit l'espace vectoriel  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$  de sa structure affine canonique et de son produit scalaire usuel. On considère un triangle équilatéral  $ABC$  inscrit dans un cercle centré à l'origine  $O$  et de rayon  $R > 0$ . (Pour fixer les idées, on supposera que le point  $A$  a pour coordonnées  $(0, R)$ .) L'ensemble  $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$  est un repère affine de  $\mathcal{E}$  *i.e.* tout point  $M \in \mathcal{E}$  s'écrit, de façon unique, comme combinaison affine  $M = xA + yB + zC$  avec  $x, y, z \in \mathbb{R}$  vérifiant  $x + y + z = 1$ . Une isométrie affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  *préserve*  $ABC$  si l'image d'un sommet est un sommet *i.e.*  $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ . On note  $G$  l'ensemble des isométries affines qui préservent le triangle  $ABC$ .

1 - Montrer que tout élément de  $G$  est en fait une isométrie linéaire et que  $G$ , muni de la composition des applications, est un groupe.

Soit  $\mathfrak{S}$  le groupe des permutations de l'ensemble  $\{A, B, C\}$ . Soit  $\phi : \mathfrak{S} \rightarrow G$  l'application définie par  $\phi(\sigma) = f_\sigma$  où  $f_\sigma$  est donnée par :

$$f_\sigma(xA + yB + zC) = x\sigma(A) + y\sigma(B) + z\sigma(C).$$

2 - Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme de groupes.

3 - Donner explicitement les isométries linéaires, éléments du groupe  $G$ .