
Préparation au CAPES - Mathématiques
Année universitaire 2008-2009
Géométrie affine et euclidienne
Évaluation - 10 décembre 2008

DURÉE : 2 HEURES - DOCUMENTS NON AUTORISÉS
Responsable : A. EL KACIMI

Dans toute la suite \mathbb{E} sera le plan affine muni d'un produit scalaire et d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Relativement à ce repère, on identifiera au besoin \mathbb{E} à l'espace euclidien \mathbb{R}^2 dans lequel un point sera repéré par ses coordonnées (x, y) ou par son affixe $z = x + iy$ si on regarde \mathbb{R}^2 comme le plan complexe \mathbb{C} .

Exercice 1

On se donne un demi-cercle Γ de diamètre AB . On choisit un point variable M sur Γ et on construit le carré $BMKL$ extérieur à Γ .

- 1 - Quel est le lieu géométrique décrit par le point L lorsque M décrit Γ ?
- 2 - Quel est le lieu géométrique décrit par le point K lorsque M décrit Γ ?

Exercice 2

On se donne trois droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 parallèles et distinctes deux à deux.

- 1 - Construire un triangle équilatéral $\mathcal{T}_0 = M_1M_2M_3$ tel que $M_1 \in \Delta_1, M_2 \in \Delta_2$ et $M_3 \in \Delta_3$.
- 2 - Montrer comment, à partir de \mathcal{T}_0 , on peut obtenir tous les autres triangles \mathcal{T} répondant à la question. Peut-on voir l'ensemble des ces triangles \mathcal{T} comme l'orbite de \mathcal{T}_0 sous l'action d'un sous-groupe G du groupe des isométries du plan \mathbb{E} ?

Exercice 3

On se donne trois points non alignés A_1, A_2 et A_3 du plan euclidien \mathbb{E} ; ils en forment donc un repère affine.

Montrer que l'ensemble de toutes les transformations affines du plan qui laissent globalement invariant le triangle $\mathcal{T} = A_1A_2A_3$ est un groupe $G_{\mathcal{T}}$ isomorphe au groupe symétrique \mathfrak{S}_3 des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 4

Sur le plan épointé $\mathbb{E}^* = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on considère la transformation T qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = T(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

- 1 - Construire géométriquement le point M' à partir du point M .
- 2 - Donner les coordonnées (x', y') du point M' en fonction du module r de z et de son argument θ .
- 3 - Quel est le lieu géométrique du point M' lorsque M varie sur le cercle de centre O et de rayon $\rho > 0$?
- 4 - Quel est le lieu géométrique du point M' lorsque M varie de telle sorte que θ (argument de z) reste constant ? (On se limitera au cas $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.)

Exercice 5

Soient A et B deux points de \mathbb{E} . Soit M un point de \mathbb{E} ; on lui associe le point M' (quand il existe) intersection des perpendiculaires en A et B respectivement aux droites (AM) et (BM) .

- 1 - Quels sont les points M auxquels on ne peut associer aucun point M' par ce procédé ?
- 2 - Où varie M' quand M varie sur une droite Δ passant par A (ou B) ?
- 3 - Où varie M' quand M varie sur un cercle Γ passant par A et B ?

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - Le point B est fixe ; le point L est l'image de M par la rotation \mathcal{R} de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Donc L décrit l'image Γ' de Γ par \mathcal{R} ; c'est un demi-cercle de diamètre BA' où $A' = \mathcal{R}(A)$.

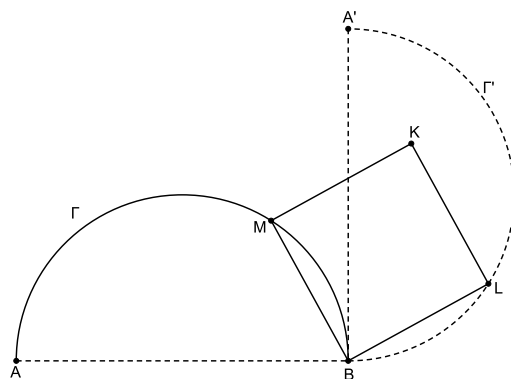


Fig. 1

2 - Cette fois-ci le point K est l'image de M par la similitude \mathcal{S} de centre B , d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$. Donc K décrit l'image Γ'' de Γ par \mathcal{S} ; c'est un demi-cercle de diamètre BA'' où $A'' = \mathcal{S}(A)$.

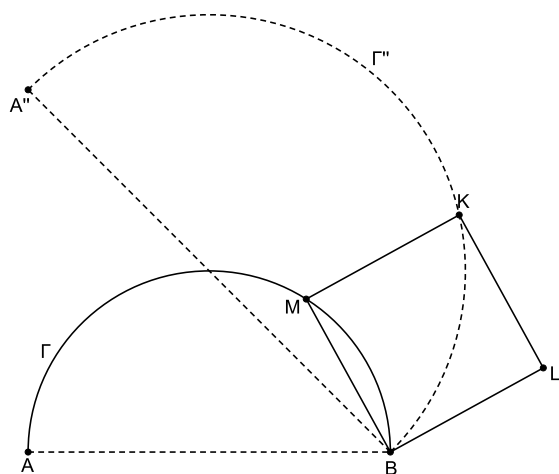


Fig. 2

Exercice 2

1 - Comme c'est un problème de construction géométrique, on commencera par le supposer résolu. On voit alors que le point M_3 est à la fois sur la droite Δ_3 et sur la droite Δ , transformée de Δ_2 par la rotation \mathcal{R}_+ de centre M_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou la rotation \mathcal{R}_- de centre M_1 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Pour construire effectivement le triangle $M_1M_2M_3$, on prend un point M_1 quelconque sur la droite Δ_1 , on construit la droite Δ , image de Δ_2 par la rotation \mathcal{R}_+ ou \mathcal{R}_- ; Δ coupe Δ_3 en un

point M_3 . Le point M_2 est alors l'image de M_3 par la rotation \mathcal{R}_- ou \mathcal{R}_+ . Nous avons donc notre triangle $\mathcal{T}_0 = M_1M_2M_3$.

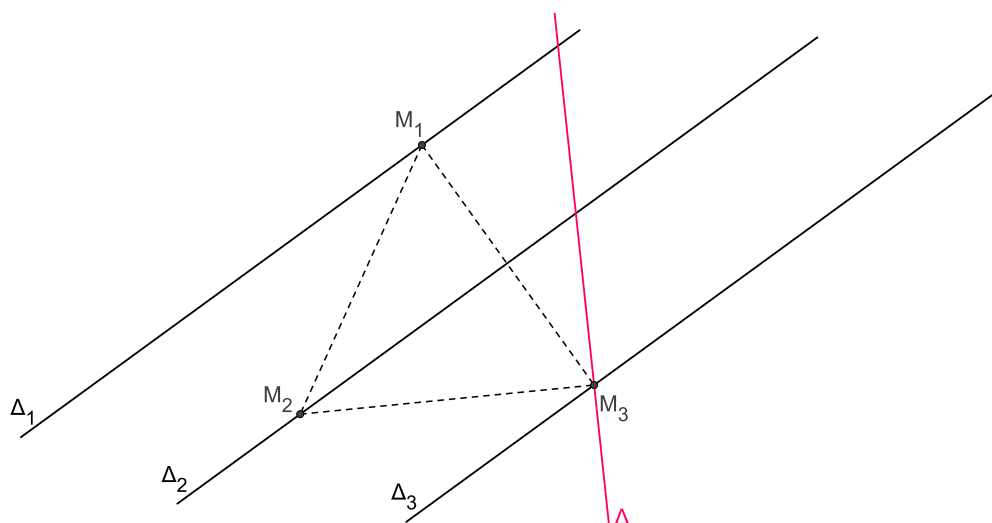


Fig. 3

2 - Si $\mathcal{T}'_0 = M'_1M'_2M'_3$ est un autre triangle répondant à la question, on a forcément $M_1M_2 = M'_1M'_2$ en raison du fait que l'intersection de Δ_3 et Δ est réduite à un seul point (méditer là-dessus vaut vraiment le coup !); donc le point M'_2 est l'un des deux points constituant l'intersection de la droite Δ_2 avec le cercle de centre M'_1 et de rayon la longueur de M_1M_2 ; cela montre que M'_2 est soit le transformé de M_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{M_1M'_1}$ ou le symétrique de M_2 par rapport à la médiatrice de M_1M_2 . Le même raisonnement s'applique au point M'_3 .

On fixe une droite \mathcal{D} perpendiculaire à Δ_1 (et donc aussi à Δ_2 et Δ_3), on note \mathcal{S} la symétrie d'axe \mathcal{D} et G le groupe des isométries de \mathbb{E} engendré par \mathcal{S} et toutes les translations de vecteurs parallèles à Δ_1 . Alors tout triangle \mathcal{T} solution au problème posé est le transformé de \mathcal{T}_0 par un élément du groupe G . En termes plus savants : l'orbite de \mathcal{T}_0 sous l'action de G est l'ensemble des solutions de notre problème ! (On peut vérifier facilement que, si \mathcal{D}' est une autre droite \mathcal{D} perpendiculaire à Δ_1 , alors le groupe des isométries de \mathbb{E} engendré par la symétrie \mathcal{S}' d'axe \mathcal{D}' et toutes les translations de vecteurs parallèles à Δ_1 est égal à G .)

Exercice 3

Dire que les points A_1, A_2 et A_3 forment un repère affine de \mathbb{E} , c'est dire que tout point M de \mathbb{E} s'écrit sous la forme $M = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ où a_1, a_2, a_3 sont des réels tels que $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ (qu'on appelle *coordonnées affines* de M dans le repère (A_1, A_2, A_3)). Ou, sous forme vectorielle, $\overrightarrow{A_1M} = \alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \beta\overrightarrow{A_1A_3}$ avec α et β des réels. À toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ on associe l'application de \mathbb{E} dans lui-même définie par :

$$f_\sigma(M) = f_\sigma(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) = a_1A_{\sigma(1)} + a_2A_{\sigma(2)} + a_3A_{\sigma(3)}.$$

Il est clair que f_σ est affine ; elle est en plus bijective et préserve l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3\}$ et par suite un élément du groupe $G_{\mathcal{T}}$. On a donc une application $\phi : \mathfrak{S}_3 \longrightarrow G_{\mathcal{T}}$. Montrons que c'est

un isomorphisme de groupes. Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_3$ et $M = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$. On a :

$$\begin{aligned} f_{\tau\sigma}(M) &= a_1A_{\tau\sigma(1)} + a_2A_{\tau\sigma(2)} + a_3A_{\tau\sigma(3)} \\ &= a_1A_{\tau(\sigma(1))} + a_2A_{\tau(\sigma(2))} + a_3A_{\tau(\sigma(3))} \\ &= f_{\tau}(a_1A_{\sigma(1)} + a_2A_{\sigma(2)} + a_3A_{\sigma(3)}) \\ &= f_{\tau}(f_{\sigma}(M)) \\ &= (f_{\tau} \circ f_{\sigma})(M) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\phi(\tau\sigma) = \phi(\tau) \circ \phi(\sigma)$ *i.e.* ϕ est un homomorphisme de groupes. Reste à montrer que ϕ est bijectif. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ tel que $f_{\sigma} = \text{identité de } \mathbb{E}$; alors f_{σ} fixe en particulier chaque point du repère *i.e.* $f_{\sigma}(A_i) = A_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, donc $\sigma(i) = i$; par suite σ est l'élément neutre de \mathfrak{S}_3 , donc ϕ est injectif. Par définition même de $G_{\mathcal{T}}$, chacun de ses éléments g permute les points A_1, A_2, A_3 donc correspond à une permutation σ de $\{1, 2, 3\}$; ce qui donne $g = f_{\sigma}$. Ceci montre que ϕ est surjectif et donc un isomorphisme.

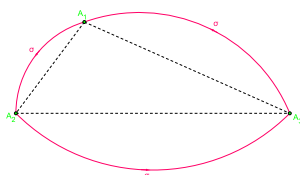


Fig. 4

Exercice 4

1 - Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{1}{z}$; alors M' est le milieu du segment $[MM_0]$ et tout le monde sait comment il se construit ! Reste seulement à contruire (géométriquement bien sûr) le point M_0 . Comme $\arg(z_0) = -\arg(z)$, le point M_0 est sur la demi-droite Δ_+ symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la demi-droite passant par O et par M . Il suffit donc de construire sur Δ_+ le point dont la distance au point O est $\frac{1}{|z|}$. Sur l'axe des abscisses, on note A et B les points d'abscisses respectives 1 et $|z|$ et sur Δ_+ , L sera le point dont la distance à O est égal à 1. Par A on mène la parallèle à (BL) ; celle-ci coupe Δ_+ en un point dont on peut vérifier facilement (à l'aide du théorème de Thalès) que ce n'est rien d'autre que le point M_0 cherché !

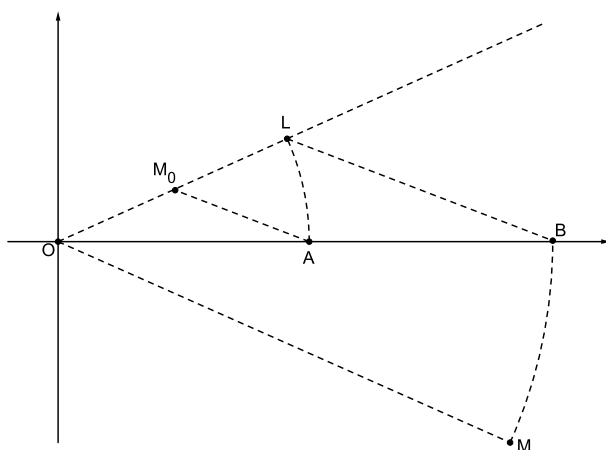


Fig. 5

2 - Si $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (avec $r = |z|$ et $\theta = \text{argument de } z$), on a $z' = x' + iy' = \frac{1}{2} \left((r + \frac{1}{r}) \cos \theta + i(r - \frac{1}{r}) \sin \theta \right)$. Donc :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \cos \theta \\ y' = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \sin \theta \end{cases}$$

3 - Dans cette situation le module r est constant égal à ρ . Si $\rho = 1$, $y' = 0$ et $x' = \cos \theta$ et décrit l'intervalle $[-1, 1]$. Donc l'image du cercle unité par T est l'ensemble :

$$\{x' + iy' : y' = 0 \text{ et } -1 \leq x' \leq 1\}.$$

Supposons $\rho \neq 1$. On pose $a = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ et $b = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$; a et b sont des constantes réelles non nulles et :

$$\begin{cases} \frac{x'}{a} = \cos \theta \\ \frac{y'}{b} = \sin \theta \end{cases}$$

ce qui donne $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ et qui montre que l'image du cercle de centre O et de rayon ρ par l'application T est une ellipse de grand axe $2a = \rho + \frac{1}{\rho}$ et de petit axe $2b = |\rho - \frac{1}{\rho}|$ et de foyers les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$.

4 - Cette fois-ci θ reste constant dans $]0, \frac{\pi}{2}[$; on pose $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$; a et b sont des constantes réelles strictement positives et :

$$\begin{cases} \frac{x'}{a} = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \\ \frac{y'}{b} = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \end{cases}$$

ce qui donne $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ et qui montre que l'image de la droite en question est une hyperbole ayant O comme centre de symétrie, comme foyers les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ et comme asymptotes les droites d'équations $y = (\text{tg}\theta)x$ et $y = -(\text{tg}\theta)x$.

Exercice 5

1 - Si $M = A$ (resp. $M = B$), la droite (MA) (resp. la droite (MB)) n'est pas définie, donc le point M' non plus. Si le point M est sur la droite (AB) privée de A et B , les droites (MA) et (MB) se confondent avec (AB) . Donc les perpendiculaires en A et B respectivement à (MA) et (MB) sont distinctes et parallèles, le point M' n'est donc pas défini. Si M n'est pas sur la droite (AB) , les droites (MA) et (MB) sont forcément distinctes et non parallèles ; les perpendiculaires par A et B respectivement à celles-ci se coupent donc en un unique point M' . Conclusion : il n'y a que les points M de la droite (AB) auxquels on ne peut pas associer des points M' par le procédé en question.

2 - Précisons que la question sous-entend droite passant par A (resp. par B) privée de A (resp. de B) puisque on a vu que les points M de la droite (AB) n'ont pas d'image M' . On doit donc chercher l'image de l'ensemble $\Sigma = \Delta \setminus \{A\}$. Comme $M \neq A$, la droite (MA) est toujours définie. Le point M' doit donc se trouver toujours sur la droite Δ' passant par A et perpendiculaire à Δ . D'autre part, le quadrilatère $AMBM'$ (convexe ou non) a ses angles $\widehat{MAM'}$ et $\widehat{MBM'}$ droits ; il est donc inscrit dans un cercle. Le point M étant choisi sur Σ , M' est donc la deuxième intersection de la droite Δ' et du cercle passant par les points A, B et M . Ce même procédé permet d'ailleurs

de construire M à partir de M' sur $\Sigma' = \Delta' \setminus \{A\}$. Conclusion : la correspondance $M \mapsto M'$ est une bijection entre Σ et Σ' .

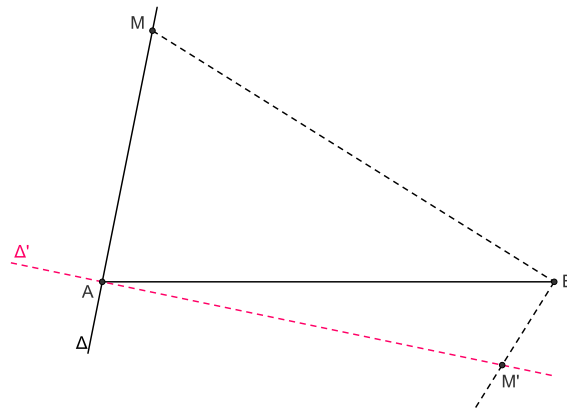


Fig. 6

3 - Précisons que la question sous-entend cercle passant par A et B privé de A et de B puisque on a vu que les points M de la droite (AB) n'ont pas d'image M' .

On vient de voir (question 3) que les quatre points $AMBM'$ sont toujours cocycliques (et en plus M' est toujours diamétralement opposé à M). Lorsque M varie sur $\Gamma \setminus \{A, B\}$, M' varie aussi sur $\Gamma \setminus \{A, B\}$. Plus : la correspondance $M \mapsto M'$ est une bijection de l'ensemble $\Gamma \setminus \{A, B\}$ sur lui-même.

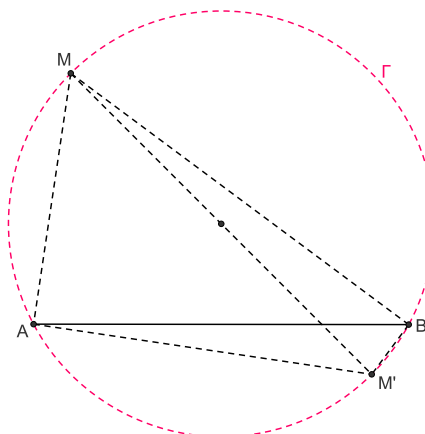


Fig. 7