

UVHC

Date de l'épreuve :	16 décembre 2009
Mention :	Mathématiques
Spécialité et/ou parcours :	Mathématiques, Mathématiques pour PE
Semestre et session :	S5 - Session 1
Module :	Analyse 5 - Code : S5MAANAS
Durée de l'épreuve :	3 heures
Matériel :	Documents, calculatrices et portables non autorisés

SUJET :

Rédiger sur deux copies différentes :
les exercices 1, 2 et 3 sur l'une et les exercices 4 et 5 sur l'autre.

Si A est une partie d'un espace métrique (E, d) , \bar{A} désignera son adhérence et $\overset{\circ}{A}$ son intérieur. Pour deux parties A et B de E , la notation $A \setminus B$ désigne l'intersection de A et du complémentaire de B . Si E est une partie de \mathbb{R} , la métrique usuelle sur E sera celle définie par $d(x, y) = |x - y|$.

Exercice 1

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E . Pour tout $x \in E$, on pose :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Ce nombre est la distance du point x à la partie A .

Montrer que $d(x, A) = 0$ si, et seulement si, $x \in \bar{A}$.

Exercice 2

On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ son graphe. On pose :

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \quad \text{et} \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

1 - Montrer que U et Ω sont des ouverts de \mathbb{R}^2 . Montrer que U n'est pas connexe.

2 - Montrer que la restriction à U de l'application $\phi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y + f(x)) \in \mathbb{R}^2$ induit un homéomorphisme de U sur Ω .

3 - Montrer que Ω n'est pas connexe.

4 - On note F la partie de \mathbb{R}^2 constituée des points (x, y) qui vérifient les conditions :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Dessiner la partie F . Montrer qu'elle est fermée et connexe par arcs. Quel est son intérieur $\overset{\circ}{F}$?

Exercice 3

Soient (E, d) un espace métrique et A et B deux parties de E . Par définition la *distance* de A à B est le nombre positif ou nul $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Soient C et K deux parties de E ; on suppose C fermée, K compacte et $C \cap K = \emptyset$.

1 - Montrer que $d(C, K) > 0$. (*Indication* : Si $d(C, K) = 0$, il existe une suite $(x_n, y_n) \in K \times C$ telle que $\lim d(x_n, y_n) = 0$. Utiliser alors le fait que K est compacte pour extraire de $(x_n)_n$ une suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers un $x \in K$...)

2 - Montrer, en donnant un exemple, qu'en général le même résultat ne reste plus vrai si les parties K et C sont fermées mais toutes les deux non compactes.

Exercice 4

On munit l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 des trois normes :

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

On pose :

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_1 = 1\}, \quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_2 = 1\}$$

et

$$S_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_\infty = 1\}.$$

Ce sont les *sphères unité* associées respectivement à ces trois normes.

1 - Dessiner S_1 , S_2 et S_∞ .

2 - Montrer que les trois sphères S_1 , S_2 et S_∞ sont deux à deux homéomorphes en donnant des homéomorphismes explicites $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$, $\Psi : S_2 \rightarrow S_\infty$ et $\Theta : S_\infty \rightarrow S_1$.

Exercice 5

On munit \mathbb{R} de la distance usuelle d . Soient a, b, α et β des réels avec $a < b$. On pose $I =]0, 1[$, $J =]-\infty, \alpha[$, $K =]\beta, +\infty[$ et $L =]a, b[$.

Montrer que ces intervalles sont homéomorphes à \mathbb{R} en donnant explicitement des homéomorphismes de \mathbb{R} sur ces intervalles à l'aide de fonctions usuelles.

Corrigé

Exercice 1

On rappelle qu'un point x de E est adhérent à A si, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ intersecte A . C'est aussi équivalent à dire qu'il existe une suite (a_n) dans A qui converge vers x .

Si $x \in \bar{A}$ (i.e. x est adhérent à A) il existe une suite (a_n) qui converge vers x . Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, a_n) = 0$; par suite $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_n d(x, a_n) = 0$. Réciproquement, si $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = 0$, il existe une suite (a_n) dans A telle que la suite réelle $d(x, a_n)$ tende vers 0 ; donc la suite (a_n) (qui est dans A) tend vers x , c'est-à-dire $x \in \bar{A}$. \diamond

Exercice 2

1 - La projection $p_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y \in \mathbb{R}$ est une application continue ; par suite la partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = p_2^{-1}(\{0\})$ est un fermé de \mathbb{R}^2 , donc son complémentaire U est un ouvert. De même, l'application $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y - f(x)) \in \mathbb{R}$ est continue, par suite la partie $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\} = g^{-1}(\{0\})$ est un fermé de \mathbb{R}^2 , donc son complémentaire Ω est un ouvert.

L'ouvert U n'est pas connexe car il est la réunion des deux ouverts disjoints tous les deux non vides :

$$U_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = p_2^{-1}(]0, +\infty[)$$

et

$$U_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} = p_2^{-1}(]-\infty, 0[).$$

\diamond

2 - L'application ϕ est clairement continue ; en plus, elle est bijective car elle admet comme inverse l'application $\phi^{-1} : (X, Y) \mapsto (X, Y - f(X))$ qui est aussi continue. Donc ϕ est un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même ; il envoie tout point $(x, 0)$ sur le point $(x, f(x))$ et réalise ainsi une bijection de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ sur Γ . Donc la restriction de ϕ à l'ouvert U est un homéomorphisme sur l'ouvert Ω .

3 - Les deux ouverts U et Ω sont homéomorphes (par l'application ϕ). Comme U n'est pas connexe, Ω ne l'est pas non plus.

4 - On pose $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$, $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 0\}$, $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0\}$ et $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ et } x \geq -1\}$; F_1, F_2, F_3 et F_4 sont fermés et $F = (F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup F_4$. Donc F est un fermé.

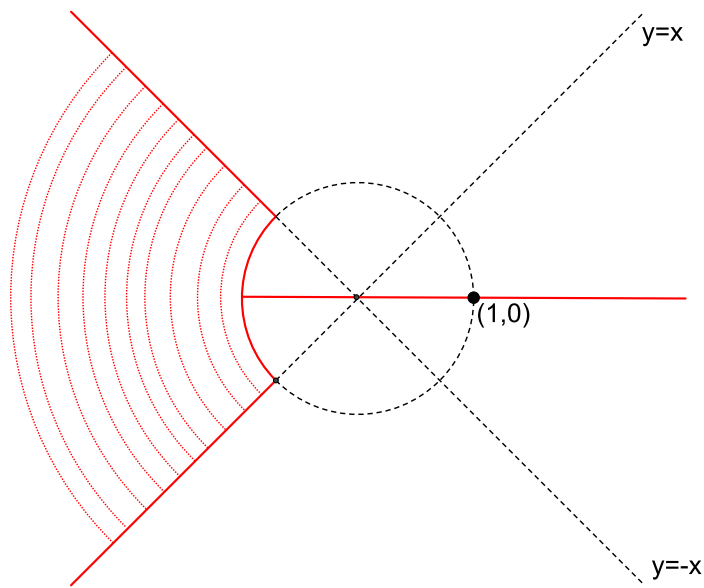


Fig. 1

Pour montrer que F est connexe par arcs, nous nous contenterons de faire des dessins. Soient M et M' deux points de F ; nous distinguons les trois cas : i) $M, M' \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$; ii) $M \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ et $M' \in F_4$; iii) $M, M' \in F_4$.

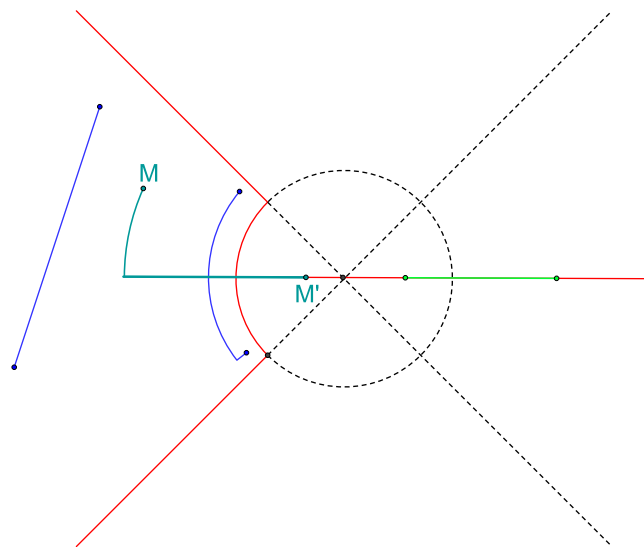


Fig. 2

Les chemins menant de M à M' sont indiqués par différentes couleurs. Le lecteur pourra trouver lui-même leurs paramétrages respectifs.

Par définition l'intérieur de F est le plus grand ouvert $\overset{\circ}{F}$ contenu dans F . La partie V définie par les inégalités $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$ est un ouvert contenu dans F . Soit M un point de F qui n'est pas dans V ; alors M est forcément sur la partie en rouge de Fig. 3 : réunion d'un arc de cercle et de trois demi-droites. On peut montrer facilement (et on le voit clairement sur le dessin) que toute boule ouverte centrée en M touche le complémentaire de F et donc M n'est pas intérieur à F ; par suite $\overset{\circ}{F} = V$. \diamond

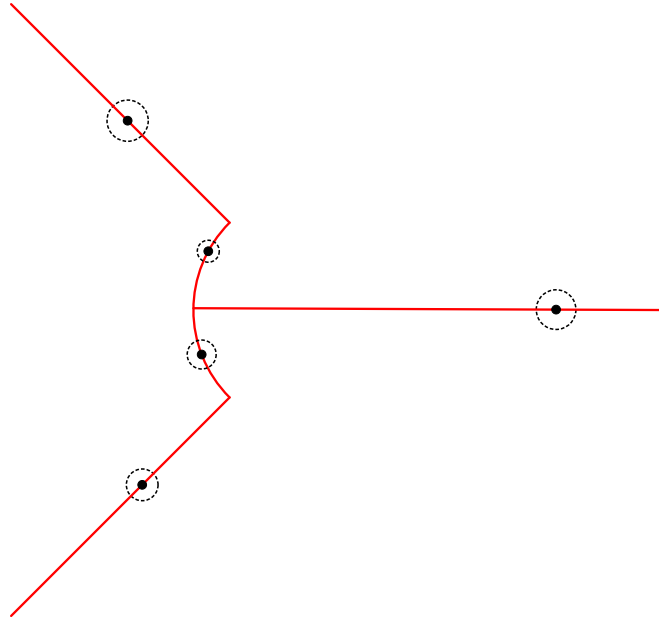


Fig. 3

Exercice 3

1 - Supposons $d(K, C) = 0$. Alors il existe une suite $(x_n, y_n) \in K \times C$ telle que $d(x_n, y_n)$ tende vers 0. Comme K est compacte, de la suite (x_n) on peut extraire une suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers un $x \in K$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(d(x_{n_k}, y_{n_k}))_k$ tend vers 0, il existe N_1 tel que $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k \geq N_1$; comme $(x_{n_k})_k$ converge vers x , il existe N_2 tel que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k \geq N_2$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$; alors, pour $k \geq N$, on a $d(x, y_{n_k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \varepsilon$; ceci montre que la suite $(y_{n_k})_k$ converge vers x . Comme $(y_{n_k})_k$ est dans C et que C est fermée, $x \in C$ et donc $C \cap K \neq \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse. Par suite $d(K, C) > 0$. \diamond

2 - On note E l'espace \mathbb{R}^2 muni de sa métrique euclidienne d , $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ et K sera le graphe de la fonction continue $f(x) = e^{-x^2}$. Alors C et K sont deux parties disjointes, fermées et non compactes de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = (n, 0)$ et $\beta_n = (n, e^{-n^2})$; (α_n) est une suite de C et (β_n) est une suite de K et $d(\alpha_n, \beta_n) = e^{-n^2}$ tend vers 0. Donc $d(K, C) = 0$. \diamond

Exercice 4

1 - Les boules unité associées à ces normes ont été déjà introduites en détail en séance de cours. Nous allons nous contenter de donner leurs dessins sans grande explication.

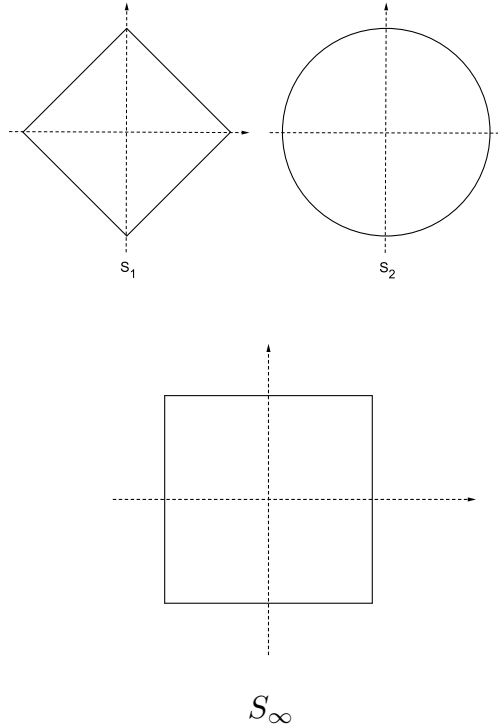


Fig. 4

2 - Soit E est un espace vectoriel de dimension finie muni de deux normes N_1 et N_2 ; alors l'application $f : E \setminus \{0\} \rightarrow E \setminus \{0\}$ définie par $f(z) = \frac{N_1(z)}{N_2(z)}z$ envoie la sphère unité Σ_1 de (E, N_1) sur la sphère unité Σ_2 de (E, N_2) . En plus f est continue, bijective d'inverse $f^{-1}(w) = \frac{N_2(w)}{N_1(w)}w$ qui est aussi continue. Donc $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ est un homéomorphisme. On applique cela à notre situation particulière et on obtient les applications suivantes qui répondent à la question :

$$\Phi(x, y) = \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y), \quad \Psi(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\max(|x|, |y|)}(x, y), \quad \Theta(x, y) = \frac{\max(|x|, |y|)}{|x| + |y|}(x, y)$$

Exercice 5

On définit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, \alpha[$, $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow]\beta, +\infty[$ et $\xi : \mathbb{R} \rightarrow]a, b[$ par :

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \text{Arctg}(x) + \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = -e^x + \alpha, \quad \zeta(x) = e^x + \beta, \quad \xi = \sigma \circ \phi$$

où $\sigma : t \in]0, 1[\rightarrow ((1-t)a + tb) \in]a, b[$. Il est facile de voir que toutes ces applications sont continues, bijectives et que leurs inverses $\phi^{-1}(y) = \text{tg}(\pi(y - \frac{1}{2}))$, $\psi^{-1}(y) = \ln(\alpha - y)$, $\zeta^{-1}(y) = \ln(y - \beta)$ et $\xi^{-1} = \phi^{-1} \circ \sigma^{-1}$ sont aussi des applications continues. Ce sont donc des homéomorphismes. \diamond