

UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

LICENCE DE MATHÉMATIQUES

Analyse 5 : Topologie métrique

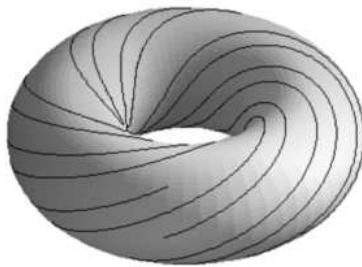
par

AZIZ EL KACIMI

aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr

<http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/>

CAHIER DE COURS ET D'EXERCICES



Courbes intégrales de l'équation différentielle
 $dy - \alpha dx = 0$ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2009-2010

AVANT-PROPOS

Ce cours d'Analyse 5 a pour but d'introduire les étudiants de Licence 3 aux éléments de base de la *topologie*. Il est important en lui-même et essentiel pour le reste des modules enseignés à ce même niveau et celui du Master 1 : mesure et intégration, calcul différentiel, variable complexe, analyse fonctionnelle, géométrie différentielle *etc.* Le mot *topologie* dérive de la composition de deux mots grecs *topos* et *logos* qui signifient respectivement *lieu* et *étude* ; cela a donné *étude du lieu*. La topologie est aussi l'étude des propriétés des figures qui restent invariantes par déformation continue. Elle était présente en mathématiques implicitement depuis déjà longtemps mais son développement n'a pris une tournure spectaculaire que depuis la fin du 19ème siècle et le début du 20ème.

Nous avons choisi de nous limiter à la *topologie métrique* et nous nous sommes restreints à l'essentiel. Quatre chapitres composent ce cours. Le premier introduit la notion de métrique et toutes ses propriétés. Celle-ci amène à la notion d'ouvert (et de fermé) et donc celle de topologie (canoniquement associée). Les suites s'introduisent de façon naturelle et, bien entendu, la notion de convergence. La complétude, qui est une notion fondamentale, est aussi étudiée. Le chapitre II est consacré aux applications continues entre espaces métriques et tout ce qui tourne autour. La continuité uniforme et la condition de Lipschitz apparaissent aussi avec leurs propriétés. Les différentes notions d'équivalence de métriques sont explicitées. Le théorème du point fixe pour une contraction d'un espace métrique complet est démontré en détail et illustré par un exemple d'application. Le chapitre se termine par la connexité qui est une propriété topologique importante. Dans le chapitre III nous étudions la compacité dont tout le monde connaît l'importance. Les belles propriétés qu'elle confère aux fonctions continues la mettent au premier rang de la topologie. Le chapitre IV est dédié à l'étude des propriétés remarquables des applications linéaires continues entre espaces normés (qui sont des cas particuliers d'espaces métriques). Des exemples concrets sont visualisés sur certains espaces fonctionnels assez présents en analyse.

Nous aurions aimé offrir un cours plus garni. Mais le manque de temps ne nous permet malheureusement pas de le faire. Ceux qui désirent en savoir plus peuvent consulter les trois ouvrages mentionnés ci-après.

Références

- [1] CHRISTOL, G., COT, A. & MARLE, C.-M. *Topologie*. Mathématiques pour le 2ème cycle, Ellipses (1997).
- [2] LEHMANN, D. *Initiation à la topologie*. Mathématiques pour le 2ème cycle, Ellipses (2004).
- [3] QUEFFÉLEC, H. *Topologie. Cours et exercices*. Editions Masson (1998).

CE QUI SERA SUPPOSÉ CONNU !

1. La hiérarchie numérique

Pour bien suivre ce cours d'Analyse 5, il est essentiel d'avoir en tête un certain nombre de notions supposées déjà enseignées en L1 et L2 et même avant. C'est ce que nous recensons dans ces pages préliminaires.

On rappelle que l'ensemble des nombres entiers naturels est noté \mathbb{N} et est exactement $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$. Ses éléments correspondent aux cardinaux des ensembles finis : on compte les éléments ! Nous ne retiendrons que ce que nous en savons intuitivement, c'est largement suffisant pour la suite. Il est muni de deux lois de composition internes : l'*addition* $(x, y) \mapsto x + y$ et la *multiplication* $(x, y) \mapsto xy$. La première est telle que :

- i) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{N}$ (*associativité*) ;
- ii) 0 est un *élément neutre* i.e. $x + 0 = 0 + x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

Le couple $(\mathbb{N}, +)$ est appelé *monoïde*. Comme on a en plus $x + y = y + x$ pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ (i.e. l'addition est *commutative*), on dira que c'est un *monoïde commutatif*. Mais c'est un objet un peu pauvre du fait qu'on ne peut pas y résoudre le problème : *quel entier naturel faut-il ajouter à n avec $n \neq 0$ pour obtenir 0 ?* Cette question s'est effectivement posée, ce qui a amené les mathématiciens à construire un ensemble contenant \mathbb{N} auquel l'addition s'étend et dans lequel cette question admet une réponse ! C'est ce qu'on note \mathbb{Z} et dont les éléments sont appelés *entiers relatifs* : $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$. En quelque sorte, ils ont symétrisé \mathbb{N} pour obtenir \mathbb{Z} ! L'addition y vérifie encore les propriétés susmentionnées et on y a alors l'assertion (tout a été fait pour) :

iii) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $n' \in \mathbb{Z}$ tel que $n + n' = 0$; ce nombre n' est habituellement noté $-n$ et appelé *opposé* de n .

On dit que le couple $(\mathbb{Z}, +)$ est un *groupe commutatif* ou *groupe abélien*.

La multiplication possède aussi de bonnes propriétés et se comporte bien vis à vis de l'addition :

- iv) $z(x + y) = zx + zy$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{Z}$ (*distributivité*) ;
- v) $xy = yx$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$ (*commutativité*) ;
- vi) $1 \cdot x = x \cdot 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$ (1 est un élément *unité*).

On dit alors que \mathbb{Z} muni de l'addition et de la multiplication est un *anneau commutatif unitaire* (commutatif car la multiplication est commutative, unitaire car il possède un élément unité ; un anneau quelconque n'est pas toujours commutatif et n'a pas obligatoirement un élément unité).

Sur l'ensemble \mathbb{Z} on peut donc faire l'addition et la multiplication avec un certain nombre de propriétés et de règles. Ceci reste toutefois insuffisant : comment traduire mathématiquement le partage de 3 galettes entre 7 personnes ? A priori, cela ne peut pas se faire dans l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$! Il faudrait l'agrandir encore de façon à ce que cette opération ait un sens ! C'est ce qui a amené la construction des *nombres rationnels* ; ils forment un ensemble noté \mathbb{Q} . Ses éléments sont du type $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$: c'est p divisé par q tout simplement même si cela heurte certains puristes vivant dans l'obsession du formalisme ! L'écriture $\frac{p}{q}$ n'est pas unique : $\frac{p}{q}$ et $\frac{kp}{kq}$ représentent le même rationnel quel que soit $k \in \mathbb{Z}^*$. Pour avoir la plus simple, on pourrait convenir de choisir $q \in \mathbb{N}^*$ et $|p|$ et q premiers entre eux *i.e.* ils n'ont aucun facteur commun dans leurs décompositions respectives en facteurs premiers. (On peut toujours se ramener à cette forme en procédant à des "simplifications".) L'addition et la multiplication sont définies par les formules :

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{q_2 p_1 + q_1 p_2}{q_1 q_2} \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}.$$

Une propriété supplémentaire est vérifiée : pour tout rationnel non nul r il existe un rationnel r' tel que $r \cdot r' = 1$; si $r = \frac{p}{q}$, r' n'est rien d'autre que $\frac{q}{p}$ ($p \neq 0$ car r est non nul). (Historiquement, il semble que la construction des nombres rationnels positifs a précédé celle des entiers relatifs ! En quelque sorte, le besoin de diviser était antérieur à celui de symétriser !) Dans \mathbb{Q} , on peut donc additionner, soustraire, multiplier, diviser et inverser les éléments non nuls ! On dit que le triplet $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un *corps commutatif*. En plus, deux éléments quelconques r, r' dans \mathbb{Q} peuvent être comparés : on a toujours $r \leq r'$ ou $r' \leq r$. La relation "est plus petit ou égal à", qu'on a notée \leq , est un *ordre total* compatible avec les opérations d'addition et de multiplication : $r \leq r' \implies r + s \leq r' + s$ pour tout $s \in \mathbb{Q}$ et $r \leq r' \implies sr \leq sr'$ pour tout $s \in \mathbb{Q}_+$. C'est déjà pas mal ! Mais malheureusement cela reste encore insuffisant, la réalité demande plus ! Un carré de côté 1 existe, sa diagonale existe aussi mais comment la "mesurer" par un rationnel ? Même ordre de difficulté : existe-t-il un plus grand rationnel d tel que $d^2 \leq 2$? Peut-on donc trouver un tel rationnel ? (on ne sait pas encore s'il

y a autre chose). Malheureusement ou heureusement (chacun l'appréciera comme il le voudra) la réponse est non ! Le "nombre" d doit donc appartenir à quelque chose de plus grand que \mathbb{Q} . Ces questions ont amené la construction des *nombres réels*. Ils forment un ensemble noté \mathbb{R} et auquel les opérations d'addition et de multiplication se prolongent. Le triplet $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est ainsi muni d'une structure de corps commutatif : on peut additionner et multiplier sans faire attention à l'ordre et prendre des opposés et des inverses !

Nous aurons besoin des propriétés et notations qui suivent dans \mathbb{R} .

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervalle fermé borné d'extrémités a et b ;

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervalle ouvert borné d'extrémités a et b ;

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ et $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ intervalles semi-ouverts (ou semi-fermés) bornés d'extrémités a et b ;

$] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ et $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ intervalles ouverts non bornés ;

$] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ et $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ intervalles fermés non bornés ;

$|a, b|$ désignera indifféremment un intervalle ouvert, fermé ou semi-ouvert *etc.* mais toujours borné. De même, $|a, +\infty[$ et $] - \infty, a|$ désigneront indifféremment des intervalles ouverts, fermés mais non bornés.

Une partie A de \mathbb{R} est dite *majorée* (resp. *minorée*) si elle est contenue dans un intervalle du type $] - \infty, a|$ (resp. $|a, +\infty[$) ; tout a qui vérifie cette propriété est appelé *majorant* (resp. *minorant*) de A ; le plus petit (resp. le plus grand) des majorants (resp. des minorants) est appelée *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*) de A . On dira que A est *bornée* si elle est contenue dans un intervalle du type $|a, b|$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$). On a l'assertion qui suit (qui a motivé la construction de \mathbb{R}) :

Toute partie majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure).

On a la notion de *valeur absolue* d'un nombre $x \in \mathbb{R}$; c'est le nombre réel positif :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La valeur absolue vérifie les propriétés qui suivent :

i) $|x| = 0 \iff x = 0$;

- ii) $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ pour tous $\lambda, x \in \mathbb{R}$;
- iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

On a aussi la notion de suite : famille dénombrable de réels rangés comme suit $x_1, x_2 \dots, x_n, \dots$. On la note habituellement (x_n) . On dira que (x_n) *converge* s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que $|x - x_n| < \varepsilon$ pour $n \geq N$; x est unique et est la *limite* de (x_n) . La propriété qui suit est souvent utilisée :

Toute suite croissante (resp. décroissante) majorée (resp. minorée) est convergente. Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

A-t-on tout ce qu'il faut ? Non ! D'autres besoins ont montré que le corps des réels $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ n'est pas un objet suffisant : l'équation polynomiale $x^2 + 1 = 0$ n'y a pas de solution ! Il faut donc encore élargir. C'est ce qui a amené la construction du corps \mathbb{C} des *nombre complexes*. Ses éléments sont de la forme $z = x + iy$ avec x et y des réels et i un nombre *imaginaire* inventé pour les besoins de la cause *i.e.* vérifiant $i^2 = -1$! Les règles d'addition et de multiplication sont :

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

et

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Ce qui manque dans \mathbb{R} est récupéré dans \mathbb{C} : le corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est *algébriquement clos*, ce qui signifie que toute équation polynomiale :

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

admet au moins une solution dans \mathbb{C} . En plus de cela, le fait que la correspondance $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x + iy \in \mathbb{C}$ soit une bijection permet d'utiliser de façon capitale les nombres complexes pour faire de la géométrie dans le plan.

Dans \mathbb{C} , nous avons la notion de *module* d'un nombre complexe $z = x + iy$. Il est défini par l'égalité $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Il vérifie les propriétés suivantes :

- i) $|z| = 0 \iff z = 0$;
- ii) $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$ pour tous $\lambda, z \in \mathbb{C}$;
- iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ pour tous $z, w \in \mathbb{C}$.

Gardons donc en tête les inclusions qui suivent et le fait que chacune d'entre elles a été établie pour répondre à une question :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

2. Quelques rappels

Un ensemble E est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (qui est aussi en bijection avec \mathbb{N} tout entier). Cela signifie qu'il existe une application bijective $\varphi : n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in E$ qui permet de numéroter les éléments de E *i.e.* E peut s'écrire $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Soient E une partie de \mathbb{R} et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dira que f est *bornée* s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in E$. Si E est un intervalle fermé borné $[a, b]$ et si f est continue alors f est bornée ; on peut même dire plus : il existe $x_0, x_1 \in E$ tels que :

$$\inf_{x \in E} f(x) = f(x_0) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in E} f(x) = f(x_1)$$

i.e. les extrémums de f sont les valeurs de f en des points de E (ce n'est pas toujours le cas d'une fonction bornée quelconque).

Une fonction complexe $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ est la donnée de deux fonctions réelles $u, v : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) = u(x) + iv(x)$. Elle est bornée si, et seulement si, les deux fonctions réelles u et v le sont ; elle est continue si, et seulement si, les deux fonctions réelles u et v le sont.

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, son *intégrale* de Riemann est parfaitement bien définie et est notée :

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Si f est continue, la fonction $F : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t) dt \in \mathbb{R}$ est aussi continue, dérivable même sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ de dérivée $F' = f$ (sur $]a, b[$ bien sûr).

L'intégrale d'une fonction complexe continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ avec $f = u + iv$ se définit par :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Rappelons aussi que, si $x \in \mathbb{R}_+$ et $p \in \mathbb{R}_+^*$, la notation x^p désigne le nombre :

$$x^p = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{p \ln x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où $\ln x$ est le logarithme népérien de x *i.e.* on a $y = \ln x \iff x = e^y$.

CHAPITRE I

TOPOLOGIE D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Soit E un ensemble non vide. Comment peut-on y définir la notion de *proximité* *i.e.* quand pourra-t-on dire que deux éléments $x, y \in E$ sont voisins ? Dans la vie courante on répond à cette question en utilisant une *distance*. C'est ce qui permet de parler de proximité de deux villes par exemple ! Nous pourrions faire la même chose si nous disposions aussi d'une distance d sur E . Lorsque c'est le cas, on dira que (E, d) est un *espace métrique*. C'est l'objet de ce chapitre ; il sera fondamental pour toute la suite du cours.

1. Premières définitions

Dans cette section on introduira la définition d'une distance (ou métrique), on en donnera quelques exemples et les premières propriétés. On sait intuitivement qu'une distance est associée à deux points, que c'est un nombre positif, qu'elle ne prend pas en compte l'ordre des points (la distance de x à y doit être la même que celle de y à x) et qu'aller directement de x à y est toujours plus court que de transiter par un troisième point z ! Cela justifie les trois axiomes donnés dans la définition qui suit.

1.1. Définition. Une *distance* (ou *métrique*) sur E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- i) $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$;
 - ii) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in E$;
 - iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tous $x, y, z \in E$.
- Le couple (E, d) s'appelle **espace métrique**.

1.2. Exemples

i) On prend $E = \mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = |x - y|$. On définit ainsi une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Elle vérifie les trois axiomes de la définition 1.1 (*cf.* les propriétés de la valeur absolue). C'est donc une distance sur \mathbb{R} . On l'appelle *distance usuelle* (il en existe d'autres comme on le verra).

ii) On prend $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$ (pour exclure le cas $n = 1$ déjà vu). Pour tous $x, y \in E$ de coordonnées respectives (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) , on

pose :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

Les deux premières sont un cas particulier de celle qui suit. Soit p un nombre réel tel que $p \geq 1$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On vérifie (avec un peu de travail) que d_1 , d_2 et d_∞ (et d_p aussi) sont des distances sur \mathbb{R}^n . On verra qu'elles ont quelque chose de plus que les autres du fait qu'elles utilisent la structure linéaire sur \mathbb{R} .

iii) On suppose que E est un ensemble quelconque. Pour tous points x et y de E , on pose :

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Un examen immédiat de l'application $\delta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ montre que c'est une distance sur E . On l'appelle *distance discrète* (ou *métrique discrète*) sur E (on justifiera cette appellation par la suite).

1.3. Définition. *Supposons que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C}). On appelle **norme** sur E toute application $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :*

- i) $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$ (**séparation**) ;
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (**homogénéité**) ;
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in E$ (**inégalité du triangle**).

Lorsque $E = \mathbb{K}$ on a vu que la valeurs absolue (cas réel) ou le module (cas complexe) $x \in \mathbb{K} \longmapsto |x| \in \mathbb{R}_+$ est une norme sur \mathbb{K} .

On dira que le couple $(E, \| \cdot \|)$ est un *espace normé* (réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Une norme donne toujours naissance à une métrique $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$. On dira que l'espace métrique (E, d) est *associé* à l'espace normé $(E, \| \cdot \|)$. Cette métrique d vérifie les propriétés :

- (*) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$ (*homogénéité*) ;
- (**) $d(x + a, y + a) = d(x, y)$ (*invariance par translation*).

Ces deux propriétés sont importantes. Elles sont nécessaires (comme exercice, voir si elles sont suffisantes) pour qu'une métrique provienne d'une norme. C'est le cas des métriques d_1 , d_2 et d_∞ qu'on vient de donner sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n ; elles sont associées respectivement aux normes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

On a aussi la norme dite L^p (qui donne la métrique d_p) :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par contre, la métrique discrète δ sur \mathbb{R}^n ne peut pas provenir d'une norme : elle est invariante par translation mais elle n'est pas homogène.

L'inégalité qui va suivre est immédiate à obtenir et très pratique dans certaines démonstrations. Soient x, y, z trois points de l'espace métrique (E, d) . Alors on a l'inégalité triangulaire $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ i.e. $d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$. En permutant x et y on obtient $d(z, y) - d(x, z) \leq d(x, y)$. Ce qui donne :

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

Si d provient d'une norme (cas où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel), on prend x et y des vecteurs quelconques et $z = 0$; on obtient alors les inégalités :

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \quad \text{et} \quad | \|x\| - \|y\| | \leq \|x + y\|.$$

Avant de continuer, donnons encore des exemples de normes sur des espaces vectoriels dont les éléments sont des fonctions vérifiant certaines propriétés. Soit E l'ensemble des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Pour $f \in E$ et $p \in [1, +\infty[$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Elles généralisent celles définies sur \mathbb{R}^n et que nous avons notées de la même manière.

1.4. Sous-espaces métriques

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E ; d est une application $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$. L'application $d_A : (x, y) \in A \times A \longrightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}_+$ est parfaitement bien définie et vérifie évidemment les axiomes i), ii) et iii) de la définition 1.1. Elle définit donc une métrique sur A . On dira que (A, d_A) est un *sous-espace métrique* de (E, d) . On dira aussi que d_A est la métrique *induite* par d sur A . Quand il n'y a pas risque de confusion d_A sera notée simplement d .

1.5. Produit d'espaces métriques

Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ n espaces métriques. On pose $E = E_1 \times \dots \times E_n$. Un élément x de E est donc un n -uplet (x_1, \dots, x_n) avec $x_i \in E_i$ pour $i = 1, \dots, n$. À partir de d_1, \dots, d_n , on peut définir plusieurs métriques sur E ; par exemple en posant :

$$d_E^1(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) \quad d_E^2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2} \quad d_E^\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i).$$

Le fait que d_E^1 , d_E^2 et d_E^∞ soient effectivement des métriques se vérifie assez facilement (en tout cas pas plus difficilement que pour les trois métriques déjà rencontrées sur \mathbb{R}^n).

1.6. Diamètre d'un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique. On appelle *diamètre* de E le nombre positif, nul ou égal à $+\infty$ défini par $\delta(E) = \sup_{x, y \in E} d(x, y)$.

Si $0 \leq \delta(E) < +\infty$, on dira que (E, d) est *borné* ou de *diamètre fini* sinon on dira que (E, d) est de *diamètre infini*.

Par exemple, \mathbb{R} muni de sa métrique usuelle a un diamètre infini. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\delta(\mathbb{R}) \geq d(n, 0) = n$; donc $\delta(\mathbb{R}) = +\infty$. Par contre tout intervalle borné $I =]a, b[$ muni de la métrique induite est de diamètre fini $\delta(I) = b - a$ (dire pourquoi).

2. Topologie d'un espace métrique

Dans toute cette section (E, d) sera un espace métrique. On va y définir la notion de proximité en utilisant la métrique d .

2.1. Définition. On appelle **boule ouverte** (resp. **boule fermée**) de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble :

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\} \quad (\text{resp. } \overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}).$$

On vérifie de façon immédiate que si $r \leq r'$ alors $B(x, r) \subset B(x, r')$, ce qui est parfaitement conforme à l'intuition qu'on en a.

Exemples

i) Si $E = \mathbb{R}$ et d est la métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$ alors la boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ n'est rien d'autre que :

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} : -\varepsilon < x - y < \varepsilon\} =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

i.e. l'intervalle ouvert de longueur 2ε et centré en x . De même, une boule fermée de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ n'est rien d'autre que :

$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} : -\varepsilon \leq x - y \leq \varepsilon\} = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$$

i.e. l'intervalle fermé de longueur 2ε et centré en x .

ii) On prend $E = \mathbb{R}^2$ et d la métrique d_2 associée à la norme $\| \cdot \|_2$. Alors la boule ouverte de centre $x = (x_1, x_2)$ et de rayon ε n'est rien d'autre que :

$$B(x, \varepsilon) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \varepsilon\}$$

i.e.

$$B(x, \varepsilon) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < \varepsilon^2\}$$

où on reconnaît le disque ouvert de centre x et de rayon ε . C'est normal qu'on trouve quelque chose de rond : d_2 est la *métrique euclidienne*. (Elle provient de la norme $\| \cdot \|_2$ qui elle-même provient d'un produit scalaire qui permet de définir la notion d'angle.)

Le lecteur pourra décrire lui-même les boules ouvertes de centre x et de rayon ε associées respectivement aux métriques d_1 et d_∞ (il faut surtout les dessiner pour bien voir qu'elles ont un aspect différent de celui de la boule euclidienne).

iii) Cette fois-ci E est n'importe quel ensemble non vide muni de la métrique discrète δ . Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Rappelons que $B(x, \varepsilon) = \{y \in E : \delta(x, y) < \varepsilon\}$. On peut voir facilement que :

$$B(x, \varepsilon) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } \varepsilon \leq 1 \\ E & \text{si } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

2.2. Définition. Une partie U de E est dite **ouverte** (ou que U est un **ouvert** de E) si, pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ (dépendant de x) tel que la boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ soit contenue dans U .

Exemples

i) L'ensemble vide \emptyset est un ouvert. En effet, il n'y a aucun x pour lequel on doit vérifier la propriété !

ii) L'ensemble E tout entier est un ouvert : il contient n'importe quelle boule (ouverte ou fermée) !

iii) Une boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert. Pour le voir, soient $y \in B(x, r)$ et $\eta = \min \{d(x, y), r - d(x, y)\}$. On prend $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \eta$. Alors $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. En effet, soit $z \in B(y, \varepsilon)$; on a :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon < d(x, y) + r - d(x, y) = r,$$

donc $z \in B(x, r)$.

2.3. Définition. Soit F une partie de E . On dira que F est **fermée** (ou que F est un **fermé** de E) si son complémentaire $U = F^c$ est un ouvert.

Exemples

i) L'ensemble vide \emptyset et E sont des fermés de E puisque leurs complémentaires respectifs E et \emptyset sont des ouverts.

ii) Toute boule fermée $\overline{B}(x, r)$ est un fermé. En effet, démontrons que son complémentaire U est un ouvert. Soit $y \in U$ et posons $\eta = d(x, y)$; alors $\eta > r$. Prenons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \eta - r$. Alors la boule ouverte $B(y, \varepsilon)$ est contenue dans U . En effet, soit $z \in B(y, \varepsilon)$; on a $d(x, z) \geq d(x, y) - d(y, z) > \eta - \varepsilon > r$ i.e. $z \notin \overline{B}(x, r)$ c'est-à-dire $z \in U$.

Les ouverts et les fermés d'un espace métrique vérifient les propriétés énumérées dans la proposition qui suit.

2.4. Proposition. Soit (E, d) un espace métrique. Alors :

i) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

ii) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

iii) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

iv) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Démonstration. i) Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts et posons $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Montrons que U est un ouvert. Soit $x \in U$; il existe alors au moins un

$i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$; par conséquent $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0} \subset U$.

ii) Soit maintenant $\{U_1, \dots, U_n\}$ une famille finie d'ouverts de E et posons $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Montrons que U est ouvert. À cet effet, soit $x \in U$; alors x appartient à chacun des U_1, \dots, U_n ; comme ils sont tous ouverts, pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_n > 0$ tels que $B(x, \varepsilon_1) \subset U_1, \dots, B(x, \varepsilon_n) \subset U_n$. Posons $\varepsilon = \inf_{i=1, \dots, n} \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$. On a alors :

$$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_1) \subset U_1, \dots, B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_n) \subset U_n$$

et par suite $B(x, \varepsilon) \subset U$. Ce qui montre que U est ouvert.

iii) Soit $\{F_i\}_{i \in I}$ une famille quelconque de fermés et posons $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Alors $U = F^c = \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c$. Comme chaque F_i est fermé, chaque F_i^c est ouvert et donc $\bigcup_{i \in I} F_i^c$ est un ouvert, ce qui montre que F est un fermé.

iv) On raisonne comme en iii) en utilisant le fait que $\left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n F_i^c$. \square

Par contre l'intersection d'une famille infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert comme le montre l'exemple qui suit. On prend $E = \mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, on note U_n l'intervalle ouvert $] - \frac{1}{n}, 1[$. Alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = [0, 1[$ qui n'est pas ouvert ! De même, une réunion infinie de fermés n'est pas toujours un fermé. On prend $E = \mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, on note F_n l'intervalle fermé $[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$. Alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n =]0, 1[$ qui n'est pas fermé !

2.5. Définition. Notons \mathcal{T} l'ensemble de tous les ouverts de l'espace métrique (E, d) . Nous avons vu que :

- i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $E \in \mathcal{T}$;
- ii) toute réunion d'éléments de \mathcal{T} est un élément de \mathcal{T} ;
- iii) toute intersection finie d'éléments de \mathcal{T} est un élément de \mathcal{T} .

On dira que \mathcal{T} est la **topologie canonique** de l'espace métrique (E, d) . Si la métrique d est associée à une norme $\| \cdot \|$ (cas où E est un espace vectoriel), on dira que \mathcal{T} est la **topologie canonique** de l'espace normé $(E, \| \cdot \|)$.

2.6. Définition. Soit x un point de E . On appelle **voisinage** de x toute partie de E qui contient un ouvert contenant x .

La notion de voisinage est un peu plus souple que celle d'ouvert et souvent utilisée dans les définitions et dans la pratique car elle est liée aux points. Soit (E, d) un espace métrique.

Exemples

i) Une partie U de E est ouverte si, et seulement si, elle est voisinage de chacun de ses points. Supposons U ouverte et soit $x \in U$; alors U est un ouvert contenu dans U et qui contient x , donc U est voisinage de x . Inversement, supposons que U est voisinage de chacun de ses points ; montrons que U est un ouvert. À cet effet, soit $x \in U$; alors il existe un ouvert V_x contenu dans U et contenant x . Il existe donc une boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ telle que $B(x, \varepsilon) \subset V_x \subset U$, donc U est ouvert.

ii) Supposons $E = \mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle. Prenons $V =]0, 1[$. Alors V n'est ni ouvert ni fermé ; V est un voisinage de tout point $x \in]0, 1[$ (facile à vérifier) mais il n'est pas un voisinage du point $x = 0$ car V ne contient aucun ouvert contenant 0).

On a la proposition qui suit dont la démonstration est exactement la même que celle de la proposition 2.4. Il est toutefois conseillé au lecteur de la mener (cela ne peut lui faire que du bien).

2.7. Proposition. Soit x un point de E . Alors :

- i) une réunion quelconque de voisinages de x est un voisinage de x ;
- ii) une intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x . (Mais une intersection quelconque de voisinages de x n'est pas toujours un voisinage de x .)

On peut aussi remarquer que toute partie qui contient un voisinage de x est elle-même un voisinage de x .

2.8. Séparation

Un espace métrique (E, d) est toujours *séparé*, c'est-à-dire que deux points distincts x et y ont des voisinages respectifs V_x et V_y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$. En effet $\eta = d(x, y)$ est un nombre strictement positif ; si on prend $V_x = B(x, \frac{\eta}{3})$ et $V_y = B(y, \frac{\eta}{3})$, clairement $V_x \cap V_y = \emptyset$.

2.9. Topologie induite

Soit A une partie de E . On a vu qu'on peut toujours restreindre la métrique d à A de telle sorte que le couple (A, d) soit à son tour un espace métrique. Il a donc une topologie associée qu'on notera \mathcal{T}_A . Un élément de \mathcal{T}_A est donc un ouvert de l'espace métrique (A, d) . On peut montrer facilement l'assertion qui suit (laissée au lecteur) :

*V est un ouvert de (A, d) si, et seulement si, il existe un ouvert U de (E, d) tel que $V = A \cap U$. On dira qu'un ouvert de A est la **trace** sur A d'un ouvert de E .*

3. Suites

C'est l'une des notions clés de la topologie métrique. Elle interviendra de façon constante le long de ce cours. Soit (E, d) un espace métrique.

3.1. Définition. On appelle **suite** dans E toute application $\mathbb{N}^* \rightarrow E$. L'image de $n \in \mathbb{N}^*$ sera notée x_n . On écrit habituellement la suite sous la forme $(x_n)_{n \geq 1}$ ou simplement (x_n) . S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n = x_k$ pour $n \geq k$, on dira que (x_n) est **stationnaire** (à partir de k).

3.2. Définition. Soit (x_n) une suite dans E . On dit que (x_n) **converge** s'il existe $x \in E$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N \implies d(x, x_n) < \varepsilon$. Autrement dit, toute boule ouverte centrée en x contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Le fait qu'une suite (x_n) converge se traduit par l'existence d'un point x vérifiant la propriété qu'on vient d'énoncer. Peut-il y en avoir plusieurs ? Non comme le dit la proposition qui suit.

3.3. Proposition. Si la suite (x_n) converge vers x , le point x est unique. On dira que x est la **limite** de (x_n) .

Démonstration. Supposons que (x_n) converge à la fois vers x et y et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N, K \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$n \geq N \implies d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad n \geq K \implies d(y, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite : $n \geq \max(N, K) \implies d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon$. Ceci dit que le nombre $d(x, y)$ est inférieur à tout $\varepsilon > 0$; il doit donc être nul *i.e.* $x = y$. \square

Exemples

i) Toute suite stationnaire est bien sûr convergente !

ii) On prend $E = \mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$. On considère la suite (x_n) donnée par $x_n = \frac{1}{n}$. Alors (x_n) converge vers 0 (ou a pour limite 0). Par contre la suite (y_n) donnée par $y_n = n$ ne converge pas ; celle donnée par $u_n = (-1)^n$ non plus !

iii) Soit (E, δ) un espace métrique discret *i.e.* E est un ensemble non vide muni de la métrique discrète. Alors toute suite convergente est stationnaire. En effet, si (x_n) converge vers x , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\delta(x, x_n) < \varepsilon$ pour $n \geq N$ ou encore $x_n \in B(x, \varepsilon)$ pour $n \geq N$. En particulier pour $\varepsilon < 1$ on a $B(x, \varepsilon) = \{x\}$ donc $x_n = x_N = x$ pour $n \geq N$. On constate que la métrique discrète n'a que les suites stationnaires comme suites convergentes ! Quelle pauvreté !

iv) Soit \mathcal{C} l'espace vectoriel réel des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On le munit de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

et de la métrique associée $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n l'élément de \mathcal{C} défini par $f_n(x) = x^n$. On cherche à voir si cette suite a une limite dans \mathcal{C} . Si elle existe, elle est forcément une fonction continue $[0, 1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ telle que la quantité $\|f - f_n\|_\infty$ tende vers 0. Comme pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty$$

la quantité $|f(x) - f_n(x)|$ tend vers 0 aussi *i.e.* la suite de réels $f_n(x)$ tend vers $f(x)$. Ceci signifie que la suite (f_n) doit d'abord converger point par point. Soit $x \in [0, 1]$; alors si $x = 1$, la suite $f_n(x) = 1^n = 1$ est constante égale à 1, donc convergente ; si $0 \leq x < 1$, la suite $f_n(x) = x^n$ converge vers 0. Le candidat pour être donc la limite de la suite (f_n) est la fonction :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

qui n'est pas continue. La suite (f_n) ne converge donc pas dans l'espace normé $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$.

3.4. Exercice

Soient (E, d) un espace métrique et F une partie de E . Montrer que F est fermée si, et seulement si, toute suite dans F qui converge a sa limite dans F . (Comme définition de fermé, prendre la 2.3.)

4. Adhérence, intérieur, frontière

On se donne toujours un espace métrique (E, d) . Soit A une partie de E .

4.1. Définition. On appelle **adhérence** de A le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé contenant A . On le note \overline{A} .

L'adhérence de A est aussi l'intersection de tous les fermés qui contiennent A . Un point de \overline{A} est dit *adhérent* à A . Un point x de E est adhérent à A si toute boule ouverte centrée en x intersecte A ou, de façon équivalente, x est limite d'une suite de points de A .

On dit que A est *dense* (ou *partout dense*) si $\overline{A} = E$. Une partie F de E est fermée si, et seulement si, $\overline{F} = F$.

Fondamental. Le corps des rationnels \mathbb{Q} est dense dans le corps des réels \mathbb{R} . (C'est la construction même de \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} qui donne cela.)

Remarque. "L'adhérence" est une notion relative : l'adhérence de A dans A est A (que A soit ouvert ou fermé).

Attention ! L'adhérence $\overline{B(x, \varepsilon)}$ de la boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ n'est pas toujours la boule fermée $\overline{B(x, \varepsilon)}$. En effet, considérer un espace métrique discret (E, δ) ayant au moins deux points et comparer la boule fermée $\overline{B(x, 1)}$ à l'adhérence $\overline{B(x, 1)}$ de la boule ouverte $B(x, 1)$.

4.2. Définition. Soit $x \in E$. On dit que x est un **point d'accumulation** de A si toute boule ouverte centrée en x contient un élément $a \in A$ distinct de x . C'est donc aussi un point adhérent à A . On dit que $a \in A$ est un **point isolé** de A s'il existe un voisinage V de a (dans E) tel que $V \cap A = \{a\}$.

Exemples

- On prend $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.
 - i) Si $A =]0, 1[$ alors $\overline{A} = [0, 1]$.
 - ii) Si $A = \{0\} \cup]1, 2]$ alors $\overline{A} = \{0\} \cup [1, 2]$; 0 est un point isolé car son voisinage $V =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ est tel que $V \cap A = \{0\}$.
 - iii) Tous les points de la partie $A = \mathbb{Z}$ de \mathbb{R} sont isolés.
- Une partie Σ de (E, d) est dite *discrète* si tous ses points sont isolés.

4.3. Définition. On appelle **intérieur** de A et on note $\overset{\circ}{A}$ le plus grand ouvert contenu dans A . C'est aussi la réunion de tous les ouverts contenus dans A . Si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, on dira que A est d'**intérieur vide**.

Exemples

• On prend $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.

i) Si $A =]-\infty, 1]$ alors $\overset{\circ}{A} =]-\infty, 1[$.

ii) Si $A = \{0\} \cup [1, 2]$ alors $\overset{\circ}{A} =]1, 2[$.

iii) Si $A = \mathbb{Q}$ alors $\overset{\circ}{A} = \emptyset$

iv) Si $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on a $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

•• Une partie U de (E, d) est ouverte si, et seulement si, $U = \overset{\circ}{U}$.

4.4. Définition. On appelle **frontière** de A le fermé $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ (l'intersection de l'adhérence de A et celle de son complémentaire).

Exemples

• On prend $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.

i) Si $A = [0, 1[$ alors $\text{Fr}(A) = \{0, 1\}$.

ii) Si $A =]0, 1[\cup \{2\}$ alors $\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\}$; d'autre part le complémentaire de A est $A^c =]-\infty, 0] \cup [1, 2[\cup]2, +\infty[$ et donc $\overline{A^c} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Par suite $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \{0, 1, 2\}$.

iii) Si $A = \mathbb{Q}$ alors $\overline{A} = \mathbb{R}$ et $\overline{A^c} = \mathbb{R}$. Donc $\text{Fr}(A) = \mathbb{R}$.

4.5. Remarques

Soit A une partie de E . Alors :

i) $\left(\overset{\circ}{A}\right)^c = \overline{A^c}$ et $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

ii) $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ si, et seulement si, $\overline{A^c} = E$.

5. Espaces métriques complets

Soit (E, d) un espace métrique. Une suite convergente dans E est une suite (x_n) pour laquelle il existe $x \in E$ (sa limite) telle que toute boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Cela force les termes à se rapprocher entre eux lorsque $n \rightarrow +\infty$. Sommes-nous toujours obligés d'avoir la limite pour savoir si une suite converge ? Non, pour un certain type d'espaces métriques, nous disposons d'un critère qui n'exige pas cela ! C'est l'objet de cette section.

5.1. Définition. Une suite (x_n) dans E est dite **suite de Cauchy** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$n, p \geq N \implies d(x_n, x_p) < \varepsilon.$$

Exemples

i) Une suite convergente (x_n) est de Cauchy. En effet, soient x sa limite et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geq N$ on ait $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour $n, p \geq N$ on a $d(x_n, x_p) \leq d(x_n, x) + d(x, x_p) < \varepsilon$.

ii) On prend $E =]0, +\infty[$, d la métrique $d(x, y) = |x - y|$ et (x_n) la suite $x_n = \frac{1}{n}$. Alors (x_n) est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On a, pour $n, p > \frac{2}{\varepsilon}$:

$$|x_n - x_p| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < \varepsilon.$$

Mais la suite (x_n) ne converge pas dans E !

Une suite de Cauchy ne converge pas nécessairement ! Ce qui nous amène à introduire la définition qui suit.

5.2. Définition. *L'espace métrique (E, d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy y est convergente. Un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ complet est appelé **espace de Banach**.*

Le théorème qui suit est la base de toute l'analyse mathématique. Nous l'énoncerons sans démonstration.

5.3. Théorème. *L'espace métrique (\mathbb{R}, d) (où d est la métrique usuelle) est complet.*

\mathbb{R} a été construit à partir de \mathbb{Q} pour avoir justement cette propriété !

Une partie A de (E, d) est dite complète si l'espace métrique (A, d_A) est complet. La proposition qui suit se démontre assez facilement.

5.4. Proposition. *Toute partie complète d'un espace métrique (E, d) est fermée. Si (E, d) est complet, toute partie fermée est complète.*

Nous terminons la section par la proposition qui suit, très utile.

5.5. Proposition. *Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. On munit le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_n$ de l'une des métriques (qu'on notera σ) :*

$$d_E^1(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) \quad d_E^2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2} \quad d_E^\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i).$$

Alors, si tous les (E_i, d_i) sont complets, l'espace métrique (E, σ) l'est aussi.

Du théorème 5.3 et de la proposition 5.5 on déduit le :

5.6. Corollaire. *L'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de n'importe laquelle des normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_\infty$, $\| \cdot \|_p$ est un espace de Banach.*

CHAPITRE II

APPLICATIONS CONTINUES

C'est un chapitre important de la topologie métrique. Une application continue entre deux espaces métriques a la propriété fondamentale du bon comportement vis à vis des suites convergentes et permet de faire beaucoup de choses. La notion de continuité admet aussi des raffinements divers.

1. Continuité

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1.1. Proposition. *Soit x un point de E et y son image par f (qui est un élément de F). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) Pour tout voisinage V_y de y , il existe un voisinage U_x de x tel que $f(U_x) \subset V_y$.*
- ii) Si (x_n) est une suite dans E qui converge vers x , la suite (y_n) , $y_n = f(x_n)$ converge vers y .*
- iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, x') < \eta \implies \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$.*

Démonstration. Le schéma sera i) implique ii) implique iii) implique i).

On suppose l'assertion i) vraie et on démontre ii). Soit (x_n) une suite dans E convergeant vers x ; on doit montrer que la suite $y_n = f(x_n)$ converge vers y . Soit $\varepsilon > 0$; la boule ouverte $V = B(y, \varepsilon)$ est un voisinage (ouvert) de y ; il existe donc un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$. D'autre part, comme x_n converge vers x , il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n \in U$ pour $n \geq N$ et donc $y_n \in f(U) \subset B(y, \varepsilon)$ pour $n \geq N$; ceci dit exactement que la suite (y_n) converge vers y .

On suppose l'assertion ii) vraie et on démontre iii). Supposons iii) fausse ; il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe x_η vérifiant $d(x, x_\eta) < \eta$ et $d(y, f(x_\eta)) \geq \varepsilon$. Si on prend $\eta = \frac{1}{n}$, on note x_η par x_n . Nous avons donc, pour tout $n \geq 1$:

$$d(x, x_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d(y, f(x_n)) \geq \varepsilon$$

i.e. la suite (x_n) converge vers x mais $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(x)$. Ce qui contredit ii) !

On suppose l'assertion iii) vraie et on démontre i). Soit V un voisinage de y . Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B(y, \varepsilon)$ soit contenue dans V . Par iii) il

existe $\eta > 0$ tel que $f(B(x, \eta)) \subset B(y, \varepsilon) \subset V$. Il suffit de prendre alors $U = B(x, \eta)$ pour avoir ce qu'on cherche. \square

1.2. Définition. On dira que f est **continue** en x si elle vérifie l'une des conditions équivalentes de la proposition 1.1.

On dira que $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est *continue* si elle est continue en tout point de E . La continuité globale se lit de façon purement topologique.

1.3. Proposition. L'application f est continue si, et seulement si, pour tout ouvert V de F , $U = f^{-1}(V) = \{x \in E : f(x) \in V\}$ est un ouvert de E .

Démonstration. Supposons que pour tout ouvert V de F , l'ensemble $U = f^{-1}(V) = \{x \in E : f(x) \in V\}$ est un ouvert de E et montrons que f est continue. Soient $x \in E$, $\varepsilon > 0$ et V la boule ouverte $B(y, \varepsilon)$. Alors $U = f^{-1}(V)$ est un ouvert de E contenant x ; il existe donc η tel que la boule ouverte $B(x, \eta)$ soit entièrement contenue dans U . On a alors de façon évidente $f(B(x, \eta)) \subset B(y, \varepsilon)$ qui n'est rien d'autre que le point iii) de la proposition 1.1.

Réciproquement, supposons f continue. Soient V un ouvert de F et $U = f^{-1}(V)$. Soient $x \in U$ et $y = f(x) \in V$. Alors V est un voisinage de y , donc U est un voisinage de x (c'est le point i) de la proposition 1.1) ; U est voisinage de chacun de ses points, il est donc ouvert. \square

On pourrait aussi traduire la continuité en termes de fermés : f est continue si, et seulement si, pour tout fermé G de F , $f^{-1}(G) = \{x \in E : f(x) \in G\}$ est un fermé de E .

Exercice. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que l'application norme $E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ i.e. celle qui à x associe sa norme $\|x\|$ est continue (\mathbb{R}_+ est muni de sa métrique usuelle).

1.4. Proposition. Soient (E, d) , (F, δ) et (G, σ) trois espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications continues. Alors l'application composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est continue.

La démonstration est une conséquence immédiate de la proposition 1.3. On voit alors que les espaces métriques sont des *objets* et les applications continues des *flèches* de la catégorie topologique.

1.5. Définition. On dira que f est un **homéomorphisme** si f est bijective et f et f^{-1} sont continues.

On dira que deux espaces métriques (E, d) et (F, δ) sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme $f : E \longrightarrow F$. On dit aussi que f est un *isomorphisme*

topologique de (E, d) sur (F, δ) . Supposons $E = F$ et que les topologies \mathcal{T}_d et \mathcal{T}_δ associées respectivement aux métriques d et δ sont égales (cette même topologie sera notée \mathcal{T}). Alors l'ensemble $\text{Homéo}(E, \mathcal{T})$ des homéomorphismes de (E, \mathcal{T}) muni de la composition des applications est un groupe.

2. Continuité uniforme

La notion de continuité dont on vient de parler ne dépend vraiment que de la topologie associée à la métrique (comme le dit la proposition 1.3). On a vu par exemple, qu'une application continue transforme une suite convergente en suite convergente. Par contre, elle ne transforme pas forcément une suite de Cauchy en suite de Cauchy comme on peut le voir sur l'exemple qui suit.

On prend $E =]0, 1[$ et $F =]1, +\infty[$ qu'on munit tous les deux des métriques d et δ induites par la métrique usuelle de \mathbb{R} i.e. $d(x, x') = |x - x'|$ et $\delta(y, y') = |y - y'|$. L'application $f : x \in E \mapsto \frac{1}{x} \in F$ est continue (c'est même un homéomorphisme). Prenons la suite $x_n = \frac{1}{n}$; (x_n) est une suite de Cauchy dans E mais son image par f , $y_n = n$ n'en est pas une ! Il faut un peu plus que la continuité.

2.1. Définition. On dit que $f : E \longrightarrow F$ est **uniformément continue** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $d(x, x') < \eta \implies \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Dans la définition de la continuité, le nombre η (cf. le point iii) de la proposition 1.3) dépend a priori de x et de ε alors que dans celle de la continuité uniforme il ne dépend (il peut ne pas en dépendre) que de ε .

Une application uniformément continue est continue. Mais la réciproque est fautive en général comme le montre l'application $x \in]0, 1[\mapsto \frac{1}{x} \in]1, +\infty[$ qu'on vient de donner.

2.2. Proposition. L'image d'une suite de Cauchy de E par une application $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ uniformément continue est une suite de Cauchy de F .

Démonstration. Soient (x_n) une suite de Cauchy dans E et (y_n) son image par f . Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, x') < \eta$ implique $\delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$. D'autre part, comme (x_n) est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n, p \geq N$ implique $d(x_n, x_p) < \eta$ et donc :

$$\delta(y_n, y_p) = \delta(f(x_n), f(x_p)) < \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite (y_n) est de Cauchy dans F . □

2.3. Définition. On dit que $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est **lipschitzienne** de rapport $k > 0$ ou *k-lipschitzienne* si, pour tous $x, x' \in E$, on a :

$$\delta(f(x), f(x')) \leq kd(x, x').$$

On démontre facilement les implications qui suivent :

$$(f \text{ lipschitzienne}) \implies (f \text{ uniformément continue}) \implies (f \text{ continue}).$$

En général, les implications réciproques sont fausses. Par exemple, l'application $f : x \in [0, 1] \longmapsto x^{\frac{1}{n}} \in [0, 1]$ (avec $n \geq 2$) est uniformément continue mais non lipschitzienne (on verra cela en exercice).

2.4. Théorème de prolongement. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, A une partie dense de E (i.e. $\overline{A} = E$) et $f : A \longrightarrow F$ une application uniformément continue. On suppose (F, δ) complet. Alors il existe une unique application uniformément continue $\widehat{f} : E \longrightarrow F$ telle que $\widehat{f}|_A = f$.

Démonstration. On la laisse au lecteur à titre d'exercice même si elle n'est pas évidente ! □

Ce théorème peut être utilisé, entre autres, à démontrer l'unicité à isométrie près du complété d'un espace métrique.

2.5. Définition. On dit que $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est une **isométrie** si elle est bijective et si elle vérifie $\delta(f(x), f(x')) = d(x, x')$ pour tous $x, x' \in E$.

Une isométrie $f : E \longrightarrow F$ est a fortiori une application lipschitzienne de rapport 1. A priori, on peut dire que $f : E \longrightarrow F$ est une isométrie si elle vérifie simplement $\delta(f(x), f(x')) = d(x, x')$ pour tous $x, x' \in E$. Mais ceci implique que f est injective ; dans ce cas on dira que f est une *injection isométrique* quand elle n'est pas surjective. C'est le cas par exemple si on munit une partie X (strictement contenue dans (E, d)) de la métrique induite d_X : l'inclusion $j : x \in X \hookrightarrow x \in E$ est une injection isométrique !

3. Équivalence de métriques

Soit E un ensemble. On le munit de deux métriques différentes d_1 et d_2 . Quelle relation y a-t-il entre les deux ? Pour contrôler la convergence d'une suite, le fait qu'elle soit de Cauchy ou non, dans quelles conditions peut-on se donner la liberté

de prendre indifféremment l'une ou l'autre ? Les réponses seront données dans cette section !

3.1. Définition. On dira que les métriques d_1 et d_2 sont :

i) **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même topologie sur E . C'est aussi équivalent à dire que l'application identité $(E, d_1) \longrightarrow (E, d_2)$ est continue ainsi que son inverse ;

ii) **uniformément équivalentes** si l'application identité $(E, d_1) \xrightarrow{i} (E, d_2)$ est uniformément bicontinue (i et i^{-1} sont uniformément continues) ;

iii) **quasi-isométriques** s'il existe une constante réelle $k \leq 1$ telle que, pour tous $x, y \in E$, on ait : $kd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \frac{1}{k}d_1(x, y)$.

Les implications suivantes sont évidentes mais leurs réciproques sont fausses en général :

$$(\text{quasi-isométrie}) \implies (\text{équivalence uniforme}) \implies (\text{équivalence topologique}).$$

3.2. Remarque

Lorsque deux métriques d_1 et d_2 sont quasi-isométriques, les diamètres de (E, d_1) et (E, d_2) sont tous les deux finis ou tous les deux infinis. (La démonstration est laissée au lecteur.)

Exemples

i) Prenons \mathbb{R}^n muni des trois métriques d_1 , d_2 et d_∞ que nous connaissons déjà. Alors on a les inégalités :

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n}d_\infty(x, y)$$

et :

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq nd_\infty(x, y)$$

ce qui implique :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq nd_2(x, y).$$

Ceci montre que les trois métriques sont quasi-isométriques deux à deux.

ii) Soit (E, d) un espace métrique. On pose $d_1 = \inf(1, d)$ et $d_2 = \frac{d}{1+d}$. On va montrer en exercice que d_1 et d_2 sont des métriques uniformément équivalentes à d . On a d'autre part : $\text{diamètre}(E, d_1) \leq 1$ et $\text{diamètre}(E, d_2) \leq 1$; si donc le diamètre de (E, d) était infini, d_1 et d_2 ne sauraient être quasi-isométriques à d .

4. Le théorème du point fixe

Il est aussi connu sous le nom de *Théorème des approximations successives*. Il est d'un intérêt fondamental notamment pour démontrer l'existence des solutions locales des équations différentielles (nous n'aborderons pas cet aspect). Dans toute la suite on se donne un espace métrique (E, d) et $f : E \longrightarrow E$ une application.

4.1. Définition. On dira que f est **contractante** s'il existe $k \in]0, 1[$ tel que, pour tous $x, y \in E$ on ait $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Une application contractante est donc lipschitzienne avec un rapport dans l'intervalle $]0, 1[$; elle est a fortiori uniformément continue. On dira aussi que f est une k -contraction de E .

4.2. Théorème. Soit f une k -contraction de E . On suppose E complet. Soit x_0 un point de E et définissons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $x_n = f(x_{n-1})$. Alors :

- i) la suite (x_n) converge vers un point x tel que $f(x) = x$;
- ii) x est unique.

On dira que x est le **point fixe** de f .

Démonstration. i) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}d(x_{n+1}, x_n) &\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \dots \\ &\leq k^n d(x_1, x_0)\end{aligned}$$

Si n et p sont des entiers naturels tels que $n \geq p \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}d(x_n, x_p) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{p+1}, x_p) \\ &\leq (k^{n-1} + \dots + k^p) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0).\end{aligned}$$

Comme $0 < k < 1$, $k^p \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$; la suite (x_n) est donc de Cauchy dans E qui est complet ; elle y converge donc vers un point x . On a :

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = f(x)$$

qui montre que x est un point fixe de f .

ii) Supposons qu'il existe y distinct de x et tel que $f(y) = y$. On a :

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Comme $x \neq y$, $d(x, y) > 0$ et l'inégalité donne donc $k \geq 1$, ce qui est faux ! Le point fixe est donc unique. Cette unicité montre aussi qu'il est indépendant du choix du point x_0 . \square

4.3. Un exemple d'application

On prend $E = \mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$ qui en fait un espace complet. On aimerait y résoudre l'équation $x^5 - x - 1 = 0$ (dite *algébrique*). Simplement on ne dispose d'aucune méthode pour le faire contrairement, par exemple, à ce qui se passe en degré 2 ou 3. À défaut de cela, on pourrait se contenter d'une solution approchée (c'est ce qu'on fait habituellement dans la vie courante) avec une précision imposée à l'avance. Le théorème du point fixe nous permet de faire cela.

Assurons-nous d'abord qu'il y a au moins une solution avant de se lancer à sa recherche. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (x^5 - x - 1) \in \mathbb{R}$ est continue, elle vaut -1 pour $x = 1$ et 29 pour $x = 2$; elle prend donc nécessairement la valeur 0 pour une certaine valeur $x \in]1, 2[$. Cette valeur vérifie $(x + 1)^{\frac{1}{5}} = x$. Posons $f(x) = (x + 1)^{\frac{1}{5}}$. Il est facile de voir que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$ et donc on a une application $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$. En plus, f est de classe C^1 (dérivable et à dérivée continue) sur $[1, 2]$ comme on peut le voir en calculant sa dérivée $f'(t) = \frac{1}{5(x+1)^{\frac{4}{5}}}$. Nous allons vérifier que f est contractante. Soient $x, y \in [1, 2]$ et appliquons à f le théorème des accroissements finis :

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{t \in [1, 2]} |f'(t)| \cdot |x - y|.$$

On voit que $f'(t) = \frac{1}{5(x+1)^{\frac{4}{5}}}$ admet un maximum égal à $k = \frac{1}{5(2^{\frac{4}{5}})} < 1$ en 1 . Donc $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, qui montre que f est contractante. Comme $[1, 2]$ est complet (c'est un fermé de l'espace complet (\mathbb{R}, d)), f admet un unique point fixe x dans $[1, 2]$. On va donner une valeur approchée de x . Si x_0 est un point quelconque de $[1, 2]$, la suite (x_n) telle que $x_n = f(x_{n-1})$ pour $n \geq 1$ converge vers x et est telle que :

$$|x - x_n| = |f(x) - f(x_{n-1})| \leq k|x - x_{n-1}| \leq \dots \leq k^n|x - x_0| \leq k^n.$$

Si on veut donc une valeur approchée de la racine en question de l'équation algébrique $x^5 - x - 1 = 0$ à ε près, il suffit de prendre x_n pour n tel que $k^n \leq \varepsilon$. Nous laissons

au lecteur le soin de faire lui-même les calculs numériques suivant la précision qu'il souhaiterait prescrire !

5. Connexité

Soit (E, d) un espace métrique. Quand peut-on dire que E est constitué d'un ou de plusieurs morceaux ? Et dans quel sens ? La réalité nous donne déjà une idée ; nous verrons qu'elle inspire en fait tout ce qui suivra !

5.1. Définition. *On dit que E est **connexe** si E n'est pas réunion de deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tous deux non vides. Il revient au même de dire que E n'est pas réunion de deux fermés disjoints F_1 et F_2 tous deux non vides.*

Définition équivalente : (E, d) est connexe si les seules parties qui sont à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide et E tout entier.

Une partie A de E est dite connexe si l'espace métrique (A, d_A) est connexe. Cela signifie que si $A = U \cup V$ où U et V sont deux ouverts disjoints de l'espace métrique (A, d_A) , alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

5.2. Théorème. *L'intervalle fermé borné $X = [0, 1]$ muni de sa métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$ est connexe.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que X ne peut pas être réunion de deux ouverts non vides disjoints. À cet effet, soient U et V deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$. Le point 0 est soit dans U soit dans V ; supposons, pour fixer les idées, que $0 \in U$. On va montrer que $U = X$ (ce qui va impliquer $V = \emptyset$).

Soit E la partie de X constituée des points a tels que $[0, a] \subset U$. Cet ensemble E est non vide puisqu'il contient 0 (l'intervalle $[0, 0] = \{0\}$ est contenu dans U) ; soit λ sa borne supérieure (qui existe car $a \leq 1$ pour tout $a \in E$). Écrivons explicitement l'assertion :

(*) λ est la borne supérieure des a dans $[0, 1]$ tels que $[0, a] \subset U$.

Affirmation 1 : $\lambda \in U$. Si le nombre λ n'appartient pas à U , il est dans V . Comme V est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $]\lambda - \eta, \lambda] \subset V$, donc a fortiori $[\lambda - \varepsilon, \lambda] \subset V$ avec $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$. Par suite le morceau $[\lambda - \varepsilon, \lambda]$ de l'intervalle $[0, \lambda]$ n'est pas contenu dans U , ce qui contredit l'assertion (*). Donc $\lambda \in U$.

Affirmation 2 : $\lambda = 1$. Supposons $\lambda < 1$. Comme U est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $]\lambda - \eta, \lambda + \eta[\subset U$, donc a fortiori $[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \subset U$ avec $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$. Par suite l'intervalle $[0, \lambda + \varepsilon] = [0, \lambda] \cup [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ est contenu dans U , ce qui contredit l'assertion (*) car $\lambda + \varepsilon$ est strictement plus grand que λ ! Donc $\lambda = 1$.

Conclusion. L'ouvert U est égal à $[0, 1]$ tout entier et par suite $V = \emptyset$. Nous avons donc montré que X est connexe. \square

Nous avons vu que la connexité est une notion qui se définit en termes d'ouverts (ou de fermés). Elle devrait posséder de bonnes propriétés vis à vis de la continuité. C'est effectivement le cas.

5.3. Proposition. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Si E est connexe, son image $f(E)$ par f est une partie connexe de F .

Démonstration. Posons $B = f(E)$ et soient U et V deux ouverts disjoints de l'espace métrique (B, δ_B) tels que $B = U \cup V$. Alors il existe deux ouverts U' et V' de (F, δ) tels que $U = B \cap U'$ et $V = B \cap V'$. Comme f est continue $O = f^{-1}(U')$ et $P = f^{-1}(V')$ sont des ouverts de E tels que $E = O \cup P$; en plus $O \cap P = \emptyset$ sinon U' et V' auraient un point commun dans B , ce qui n'est pas le cas puisque $U \cap V = \emptyset$. Comme E est connexe on a $O = \emptyset$ ou $P = \emptyset$; par suite $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$. Ce qui montre que B est connexe. \square

Soient $x, y \in E$. On appelle *chemin* (ou *arc*) d'origine x et d'extrémité y toute application continue $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On dit que le chemin γ joint x à y .

5.4. Définition. On dit que E est **connexe par arcs** si deux quelconques de ses points peuvent être joints par un chemin. On dira qu'une partie A de E est connexe par arcs si l'espace métrique (A, d_A) l'est.

5.5. Théorème. Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.

Démonstration. On va la mener par l'absurde en supposant que E n'est pas connexe i.e. E est réunion de deux ouverts disjoints U et V tous les deux non vides. Soient $x \in U$ et $y \in V$. Comme E est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Alors $I = \gamma^{-1}(U)$ et $J = \gamma^{-1}(V)$ sont des ouverts non vides (car $0 \in I$ et $1 \in J$) de $[0, 1]$ disjoints et tels que $[0, 1] = I \cup J$; ceci est une contradiction avec le fait que $[0, 1]$ est connexe. Ce qui établit ce qu'on cherche. \square

Exercice. Montrer que tout intervalle de \mathbb{R} est connexe par arcs (et donc connexe) et que les seules parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

5.6. Théorème des valeurs intermédiaires. Soient (E, d) un espace métrique connexe et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Soient $x, y \in E$ et posons $c = f(x)$ et $d = f(y)$. Alors, pour tout $\alpha \in [c, d]$, il existe $z \in E$ tel que $\alpha = f(z)$.

Démonstration. D'après la proposition 5.3, l'image $f(E)$ de E par f est une partie connexe de \mathbb{R} donc un intervalle. Cet intervalle contient les points c et d ; il contient donc l'intervalle $[c, d]$ i.e. $[c, d] \subset f(E)$ ce qui signifie que tout $\alpha \in [c, d]$ est de la forme $f(z)$ avec $z \in E$. \square

Tout le monde a utilisé ce théorème au moins une fois ! N'est-ce pas ? On l'a déjà fait dans ce même chapitre à la sous-section 4.3.

5.7. Graphe d'une fonction continue

On nous a toujours raconté l'histoire suivante. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . Alors on peut tracer son graphe sans lever la main ! Pourquoi peut-on faire cela ? Supposons, pour fixer les idées que $I = [0, 1]$. Le graphe de f est la partie de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1] \text{ et } y = f(x)\}.$$

C'est aussi l'image de l'intervalle $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 par l'application $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui à x associe le point $\gamma(x)$ de coordonnées $(x, f(x))$. Si on munit \mathbb{R}^2 de l'une des normes qu'on a déjà considérées, on montre facilement que γ est continue. Comme $[0, 1]$ est connexe, son image Γ (par l'application γ) est une partie connexe de \mathbb{R}^2 . C'est un chemin qui part de $\gamma(0)$ image de 0 et qui arrive vers $\gamma(1)$ image de 1. Ce chemin est décrit de façon continue par la pointe du crayon qui le trace !

Ce qui n'est plus vrai si f n'est pas continue ou si elle est continue mais que le domaine sur lequel elle est définie n'est pas un intervalle.

CHAPITRE III

ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS

Quand on se donne une suite dans un espace métrique, on essaie toujours de voir si elle converge. Si oui, c'est tant mieux (si c'est ce qu'on cherche) ! Sinon, on pourrait s'intéresser seulement à voir si une partie de cette suite s'accumule autour d'un point qui pourrait, en quelque sorte, jouer le rôle d'une limite. Y a-t-il des espaces qui offrent cette possibilité à toutes les suites ? Oui, ce sont ceux faisant l'objet de ce chapitre. On verra qu'ils ont aussi d'autres propriétés importantes qui les mettent au premier plan de la topologie métrique.

0. Notations et rappels

Dans toute cette section on se donne un espace métrique (E, d) . On commencera par rappeler quelques définitions indispensables pour tout le chapitre.

0.1. Définitions

i) Un *recouvrement ouvert* de E est la donnée d'une famille d'ouverts $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ telle que $E = \bigcup_{i \in I} U_i$. Par exemple la famille $U_i =]i - \varepsilon, i + 1 + \varepsilon[$ avec $i \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon > 0$ est un recouvrement ouvert de \mathbb{R} .

ii) Soient (x_n) une suite dans E et $\phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on notera n_k l'entier $\phi(k)$. Alors x_{n_k} est un des éléments de la suite (x_n) . L'ensemble $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est appelée *sous-suite* (ou *suite extraite*) de (x_n) . Par exemple si $E = \mathbb{R}$ et $x_n = \frac{1}{n}$, la suite $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^k}, \dots\}$ en est une sous-suite ; elle est construite à l'aide de l'application strictement croissante $\phi : k \in \mathbb{N}^* \longmapsto 2^k \in \mathbb{N}^*$.

iii) Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E . Une partie A de E est dite *\mathcal{U} -petite* s'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $A \subset U_{i_0}$.

iv) Soit $\varepsilon > 0$. Un *ε -réseau* de E est une partie R de E telle que, pour tout $x \in E$, il existe $a \in R$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$. Cela signifie que les boules ouvertes $B(a, r)$ (avec a parcourant R) recouvrent E .

0.2. Remarques

i) Si (x_n) converge vers x , toute suite (x_{n_k}) extraite de (x_n) converge vers x .

- ii) Si (x_n) est de Cauchy, toute suite (x_{n_k}) extraite de (x_n) est aussi de Cauchy.
- iii) Si (x_n) est de Cauchy et admet une sous-suite (x_{n_k}) convergant vers x , (x_n) elle-même converge vers x .
- iv) Si (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) convergente, (x_n) n'est pas forcément convergente.

v) Soit (x_n) une suite dans E . Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, posons $F_m = \overline{\{x_n : n \geq m\}}$. Alors la suite (F_m) est décroissante i.e. $F_{m+1} \subset F_m$ et :

$$\bigcap_{m \geq 1} F_m \neq \emptyset \iff (x_n) \text{ admet une sous-suite convergente.}$$

La démonstration est à faire ! C'est un excellent exercice !

1. Différentes définitions de la compacité

1.1. Définition. On dira que (E, d) est **compact** si, de tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, on peut extraire un recouvrement fini U_{i_1}, \dots, U_{i_n} . Il revient au même de dire que de toute famille de fermés $\{F_i\}_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, on peut extraire une famille finie F_{i_1}, \dots, F_{i_n} telle que $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = \emptyset$.

Une partie A de E est dite compacte si l'espace métrique (A, d_A) l'est.

Soit $\varepsilon > 0$; les boules ouvertes $U_x = B(x, \varepsilon)$, avec x parcourant E , recouvrent E . Si E est compact, on peut extraire du recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in E}$ un recouvrement fini U_{x_1}, \dots, U_{x_n} . Donc, tout espace métrique compact peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon prescrit à l'avance !

1.2. Théorème (Bolzano-Weirstrass). Pour que l'espace métrique E soit compact il faut, et il suffit, que toute suite admette une sous-suite convergente.

Démonstration. On suppose E compact. Soit (x_n) une suite dans E ; montrons qu'elle admet une sous-suite convergente. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_m = \{x_n : n \geq m\} \quad \text{et} \quad F_m = \overline{A_m}.$$

Si (x_n) n'avait pas de sous-suite convergente, on aurait $\bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} F_m = \emptyset$. Comme E est compact, on peut extraire de la suite (F_m) une famille finie F_{m_1}, \dots, F_{m_k} telle que $F_{m_1} \cap \dots \cap F_{m_k} = \emptyset$. Mais ceci est impossible car :

$$F_{m_1} \cap \dots \cap F_{m_k} = F_\ell \neq \emptyset$$

où $\ell = \max\{m_1, \dots, m_k\}$. La réciproque nécessite un peu plus de travail et les deux lemmes qui suivent.

Lemme 1. *Soit (E, d) un espace métrique dans lequel toute suite admet une sous-suite convergente. Alors, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute partie A de E on ait : $\text{diamètre}(A) < \varepsilon \implies A$ est \mathcal{U} -petite.*

ε s'appelle le *nombre de Lebesgue* du recouvrement ouvert \mathcal{U} .

Démonstration. On suppose que ce n'est pas vrai *i.e.* il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \subset E$ de diamètre $< \varepsilon$ et non \mathcal{U} -petite. À $\varepsilon = \frac{1}{n}$ correspond A_n .

(*) Chaque partie A_n est de diamètre $< \frac{1}{n}$ et n'est contenue dans aucun U_i .

Dans chaque A_n on choisit un point x_n . La suite (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) convergente (par l'hypothèse du lemme) ; soit y sa limite. Il existe $i_0 \in I$ tel que $y \in U_{i_0}$. Ce U_{i_0} contient une boule ouverte $B(y, \varepsilon)$ (car il est ouvert). Soit $n_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_{n_k}, y) < \frac{\varepsilon}{2}$; soit $x \in A_{n_k}$. Alors :

$$d(x, y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$$

donc $A_{n_k} \subset B(y, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Ce qui contredit l'assertion (*). Le lemme est donc démontré. \square

Lemme 2. *Soit (E, d) un espace métrique dans lequel toute suite admet une sous-suite convergente. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, E admet un ε -réseau fini.*

Démonstration. Supposons que ce n'est pas le cas *i.e.* il existe $\varepsilon > 0$ tel que E n'admette aucun ε -réseau fini. Soit $x_1 \in E$; la boule ouverte $B(x_1, \varepsilon)$ ne recouvre pas E (sinon la partie $\{x_1\}$ serait un ε -réseau à un seul élément). Soit alors $x_2 \in E \setminus B(x_1, \varepsilon)$; les deux boules ouvertes $B(x_1, \varepsilon)$ et $B(x_2, \varepsilon)$ ne recouvrent pas non plus E (sinon la partie $\{x_1, x_2\}$ serait un ε -réseau à deux éléments) ; il existe donc $x_3 \in E \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$. De cette façon on construit une suite (x_n) dans E telle que, pour tout $n \geq 2$, $x_n \in E \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_{n-1}, \varepsilon))$. Cette suite vérifie $d(x_n, x_p) \geq \varepsilon$ et ne peut donc admettre de sous-suite convergente, ce qui contredit l'hypothèse. Le lemme est ainsi démontré. \square

Suite de la démonstration du théorème de BW

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E . Sous l'hypothèse que de toute suite on peut extraire une suite convergente, on va montrer que de \mathcal{U} on peut

extraire un recouvrement fini. Par le lemme 1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute partie A de diamètre $< \varepsilon$ soit contenue dans un U_i . Par le lemme 2, E admet un $\frac{\varepsilon}{2}$ -réseau fini $R = \{x_1, \dots, x_n\}$ i.e. $E = \bigcup_{j=1}^n B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Mais, pour tout $j = 1, \dots, n$, il existe U_j tel que $B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset U_j$. Alors $E = \bigcup_{j=1}^n U_j$. Ce qui termine la démonstration. \square

2. Quelques propriétés

2.1. Proposition. *Tout espace métrique compact (E, d) est de diamètre fini.*

Démonstration. La famille (indexée par $x \in E$) de boules ouvertes $B(x, 1)$ est un recouvrement ouvert de E . Comme E est compact, on peut extraire de ce recouvrement ouvert un recouvrement fini $B(x_1, 1), \dots, B(x_n, 1)$. On pose :

$$\alpha = \sup_{i,j=1,\dots,n} d(x_i, x_j) < +\infty.$$

Alors : $\text{diamètre}(E) \leq \alpha + 2 < +\infty$. En effet, si $x, y \in E$, il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $x \in B(x_i, 1)$ et $y \in B(x_j, 1)$. D'où :

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq 1 + \alpha + 1 = \alpha + 2.$$

Ce qui démontre la proposition. \square

2.2. Proposition. *Soit (E, d) un espace métrique. Toute partie compacte de E est fermée. Si E est compact, toute partie fermée est compacte.*

Démonstration. Soit F une partie compacte de E . Soit (x_n) une suite dans F convergeant vers x (pas nécessairement dans F a priori). Alors (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) qui converge dans F ; par unicité de la limite, cette suite converge vers x ; F est donc fermée.

Supposons E compact et soit F une partie fermée de E . Soit (x_n) une suite dans F ; alors elle admet une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $x \in E$. Comme F est fermée, $x \in F$. On a donc montré que de toute suite dans F on peut extraire une suite qui converge dans F ; ce qui veut dire que F est une partie compacte de l'espace métrique E . \square

2.3. Proposition. *Soit (E, d) un espace métrique compact. Alors (E, d) est complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Comme E est compact, (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) convergente. Donc (x_n) est elle-même convergente. \square

2.4. Proposition. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Si E est compact, l'image $B = f(E)$ de E par f est une partie compacte de F .

Démonstration. Soit $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de B . Chaque V_i est de la forme $V_i = B \cap V'_i$ où V'_i est un ouvert de F . Comme f est continue, chaque $U_i = f^{-1}(V'_i)$ est un ouvert de E ; en plus $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de E . Comme E est compact, on peut extraire de \mathcal{U} un recouvrement fini $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$. Il est alors clair que $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_n}\}$ est un recouvrement fini de B extrait de \mathcal{V} , ce qu'il fallait démontrer. \square

De cette proposition on tire immédiatement le corollaire qui suit.

2.5. Corollaire. Supposons les espaces métriques (E, d) et (F, δ) homéomorphes. Alors (E, d) est compact si, et seulement si, (F, δ) l'est.

En particulier si d_1 et d_2 sont deux métriques topologiquement équivalentes sur un ensemble E , alors E est compact pour d_1 si, et seulement si, il l'est pour d_2 . La compacité est donc une notion purement topologique.

2.6. Proposition. Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. On munit le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_n$ de l'une des métriques d_E^1, d_E^2 ou d_E^∞ qu'on a déjà définies ; on la notera δ . Alors (E, δ) est compact si, et seulement si, tous les (E_i, d_i) le sont.

Démonstration. Nous allons la faire pour $n = 2$. Pour n plus grand elle n'est compliquée qu'au niveau des notations. Les trois métriques d_E^1, d_E^2 et d_E^∞ étant toutes quasi-isométriques, on choisira de travailler avec l'une d'elles, par exemple $\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

Remarquons d'abord que les projections $p_1 : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \longmapsto x_1 \in E_1$ et $p_2 : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \longmapsto x_2 \in E_2$ sont surjectives et vérifient :

$$d_i(p_i(x_1, x_2), p_i(y_1, y_2)) \leq \delta((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

(pour $i = 1, 2$) et sont donc continues. Si donc (E, δ) est compact, chacun des espaces (E_i, d_i) est compact en vertu de la proposition 2.4.

Réciproquement, supposons que les espaces (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont compacts. Soit (z_k) une suite dans (E, δ) . Chaque z_k (pour $k \in \mathbb{N}^*$) est un élément (x_1^k, x_2^k) de $E_1 \times E_2$. Comme (E_1, d_1) est compact, la suite (x_1^k) admet une sous-suite $(x_1^{\phi(k)})$ qui converge vers un élément $x_1 \in E_1$. De même, (E_2, d_2) étant compact, de la suite $(x_2^{\phi(k)})$ on peut extraire une suite $(x_2^{\psi(k)})$ qui converge vers un élément $x_2 \in E_2$. Il

est alors clair que la suite $(z_{\psi(k)})$ où $z_{\psi(k)} = (x_1^{\psi(k)}, x_2^{\psi(k)})$ est une suite extraite de (z_k) qui converge vers $z = (x_1, x_2)$. Ceci montre que l'espace métrique (E, δ) est compact. \square

Le théorème qui suit sera utile pour décrire de façon exacte tous les compacts de l'espace \mathbb{R}^n muni de l'une des métriques (ou normes) déjà rencontrées.

2.7. Théorème. *Tout intervalle fermé borné $[a, b]$ muni de sa métrique usuelle est compact.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite dans $[a, b]$. Posons :

$$I = \{i \in \mathbb{N}^* : x_i \geq x_j \text{ pour } j \geq i + 1\}.$$

Premier cas : I est infini

On range alors ses éléments dans un ordre croissant $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$. Alors la sous-suite $(x_{i_k})_{k \geq 1}$ est strictement décroissante ; comme elle est minorée par a , elle converge.

Deuxième cas : I est fini

Il existe donc $j_1 \notin I$. Alors x_{j_1} ne majore pas l'un des $x_{j_1+1}, x_{j_1+2}, \dots$. Il existe donc $j_2 > j_1$ avec $j_2 \notin I$ tel que $x_{j_1} < x_{j_2}$. De cette manière on construit une suite strictement croissante $(x_{j_k})_k$. Comme elle est majorée par b , elle converge.

Dans tous les cas, on a montré que (x_n) admet une sous-suite convergente. Donc $[a, b]$ est compact. \square

2.8. Corollaire. *Les compacts de \mathbb{R}^n muni de l'une des métriques déjà rencontrées sont exactement les parties fermées et bornées.*

Démonstration. C'est une conséquence presque immédiate du théorème 2.7 et des propositions 2.2 et 2.6. \square

2.9. Théorème. *Soient (E, d) un espace métrique compact et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes en des points de E i.e. il existe x_0 et x_1 tels que :*

$$\inf_{x \in E} f(x) = f(x_0) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in E} f(x) = f(x_1).$$

Démonstration. L'image de E par f est un compact ; il est donc borné. Par suite f est bornée. Notons m le nombre $\inf_{x \in E} f(x)$. Il existe donc une suite (z_n) dans $f(E)$ convergeant vers m ; chaque z_n est de la forme $f(x_n)$. Comme E est compact, (x_n)

admet une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers un élément x_0 de E . Et comme f est continue :

$$f(x_0) = f\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = m = \inf_{x \in E} f(x).$$

On raisonne de façon similaire pour $M = \sup_{x \in E} f(x)$. □

Nous terminons par un dernier théorème important reliant la continuité à la continuité uniforme (intervient par exemple dans la construction de l'intégrale de Riemann).

2.10. Théorème. *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques avec (E, d) compact et $f : E \rightarrow F$ une application continue. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soient x un point de E et $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, il existe $\eta_x > 0$ tel que :

$$(**) \quad \forall x' \in E : d(x, x') < \eta_x \implies \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Les boules ouvertes $B(x, \frac{\eta_x}{2})$, avec x parcourant E , recouvrent E . Comme E est compact, d'après le lemme 1 utilisé dans la démonstration du théorème de BW, il existe $\eta > 0$ tel que toute partie de diamètre $< \eta$ soit contenue dans l'une de ces boules. Soient $x, x' \in E$ tels que $d(x, x') < \eta$ i.e. la partie $\{x, x'\}$ est de diamètre $< \eta$; alors il existe $a \in E$ tel que $x, x' \in B(a, \frac{\eta_a}{2})$ et donc $d(x, x') < \eta_a$, ce qui, d'après (**), implique $\delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Ceci montre que f est uniformément continue. □

CHAPITRE IV

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

On a déjà rencontré les espaces normés comme exemples d'espaces métriques. Les applications qui conservent la structure vectorielle sont dites *linéaires*. L'étude de leur continuité est importante et est beaucoup plus commode que celles des applications quelconques entre espaces métriques. C'est l'objet de ce chapitre.

1. Généralités

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On rappelle qu'une application $f : E \rightarrow F$ est dite *linéaire* si elle vérifie :

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in E$;
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.1. Proposition. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq \alpha\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.*
- f est continue.*
- f est continue en 0.*

Ce théorème dit que rien que le fait que f soit continue en 0 implique qu'elle est en réalité lipschitzienne ! On voit à quel point la linéarité de f et l'utilisation des normes sont importantes ! Dorénavant on omettra les indices E et F dans l'écriture des normes : on comprend parfaitement que $\|x\|$ signifie norme de x dans E lorsque $x \in E$ et $\|f(x)\|$ signifie norme de $f(x)$ dans F .

Démonstration. Le schéma est le suivant : $i) \implies ii) \implies iii) \implies i)$. L'implication $ii) \implies iii)$ est immédiate ; $i) \implies ii)$ découle de :

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq \alpha\|x - y\|.$$

Montrons $iii) \implies i)$. Comme f est continue en 0, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$: $\|x\| < \eta \implies \|f(x)\| < \varepsilon$. Soit $x \in E$. Si $x = 0$, l'inégalité $\|f(x)\| \leq \alpha\|x\|$ est vérifiée trivialement (pour tout $\alpha > 0$ d'ailleurs). Supposons $x \neq 0$. Alors $y = \frac{\eta}{2\|x\|}x$ a pour norme $\|y\| = \frac{\eta}{2} < \eta$. Donc $\|f(y)\| < \varepsilon$, d'où $\|f(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{\eta}\|x\|$. On pose alors $\alpha = \frac{2\varepsilon}{\eta}$. On obtient finalement $\|f(x)\| \leq \alpha\|x\|$ pour tout $x \in E$. C'est justement ce qu'on cherche à démontrer. \square

1.2. Conséquences

i) Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq \alpha$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$; autrement dit, f est bornée sur la boule unité fermée de E . On pose alors : $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$. Ce nombre est appelé *norme* de f .

Notons $L_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . C'est un \mathbb{K} -espace vectoriel et l'application $f \in L_c(E, F) \longmapsto \|f\| \in \mathbb{R}_+$ est une norme (la vérification est laissée au lecteur). Lorsque $F = \mathbb{K}$ (\mathbb{K} est un espace vectoriel sur lui-même), $L_c(E, \mathbb{K})$ est noté E' et appelé *dual topologique* de E . Un élément de $L_c(E, \mathbb{K})$ est appelé *forme linéaire* (continue) sur E

ii) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Alors l'application identité $(E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ est continue ainsi que son inverse si, et seulement si, elles sont uniformément continues, si et seulement si, elles sont lipschitziennes. Les métriques d_1 et d_2 associées respectivement à ces normes sont donc topologiquement équivalentes si, et seulement si, elles sont uniformément équivalentes si, et seulement si, elles sont quasi-isométriques. Pour les distances provenant de normes il n'y a donc qu'une seule notion d'équivalence ! On parlera simplement de *normes équivalentes*.

1.3. Exercice

Montrer que si l'espace normé $(F, \|\cdot\|)$ est complet, il en est de même pour l'espace normé $(L_c(E, F), \|f\|)$. En particulier le dual topologique E' de E muni de la norme $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ est complet.

1.4. Définition. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces normés et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dira que f est un **isomorphisme d'espaces normés** ou une **isométrie** si elle vérifie $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$ et est surjective. (L'injectivité de f découle de l'égalité $\|f(x)\| = \|x\|$.)

Dans la pratique, pour voir qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est continue, on montre :

- i) qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq \alpha\|x\|$ pour tout $x \in E$ ou
- ii) que toute suite (x_n) qui tend vers 0 est telle que $f(x_n) \rightarrow 0$ ou
- iii) que f est bornée sur la boule unité fermée.

Pour montrer que f n'est pas continue, le plus souvent on cherche une suite (x_n) tendant vers 0 et telle que $(f(x_n))$ ne tende pas vers 0.

Le théorème qui suit est important. Il permet de dire dans quelles conditions on peut prolonger une application linéaire continue. Sa démonstration est une simple adaptation au cas linéaire et normé de celle du théorème II.2.4 (nous avons suggéré au lecteur de la faire, nous espérons qu'il l'a effectivement faite).

1.5. Théorème. Soient $(E, \| \cdot \|)$ et $(F, \| \cdot \|)$ deux espaces normés, V un sous-espace dense de E et $f : V \rightarrow F$ une application linéaire continue. On suppose F complet. Alors il existe une application linéaire continue $\widehat{f} : E \rightarrow F$ telle que $\widehat{f}|_V = f$ et $\| \widehat{f} \| = \| f \|$.

2. Quelques propriétés

Rappelons qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel est dit de *dimension finie* s'il possède une base ayant un nombre fini d'éléments (e_1, \dots, e_n) ; l'entier n est la *dimension* de E . Tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ où x_1, \dots, x_n sont des éléments de \mathbb{K} (on dit des *scalaires*). On a alors un isomorphisme :

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E.$$

Les scalaires x_1, \dots, x_n sont appelés *coordonnées* de x dans la base (e_1, \dots, e_n) . C'est la raison pour laquelle un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n est toujours vu comme \mathbb{K}^n .

2.1. Théorème. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Alors toutes ses normes sont équivalentes.

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . On définit sur E la norme :

$$N_1(x) = N_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

i) Si on munit \mathbb{K}^n de la "même norme" $N_1((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n |x_i|$, l'application linéaire $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ est un isomorphisme d'espaces normés. Il en résulte que la sphère unité $\mathcal{S}_1 = \{x \in E : N_1(x) = 1\}$ est compacte.

ii) Soit N une autre norme sur E . On pose $\eta = \max_{i=1, \dots, n} N(e_i)$; c'est un nombre réel strictement positif. On a :

$$N(x) = N \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \eta \sum_{i=1}^n |x_i| = \eta N_1(x).$$

Donc l'application identité $(E, N_1) \longrightarrow (E, N)$ est continue. Par suite \mathcal{S}_1 est compacte pour la norme N . Comme l'application $N : x \in E \longmapsto N(x) \in \mathbb{R}_+$ est continue et strictement positive sur le compact \mathcal{S}_1 , il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour $z \in \mathcal{S}_1$, on ait $\alpha \leq N(z) \leq \beta$. Donc, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ on a $\alpha \leq N\left(\frac{x}{N_1(x)}\right) \leq \beta$. Ce qui donne finalement :

$$\alpha N_1(x) \leq N(x) \leq \beta N_1(x) \quad \forall x \in E.$$

Ceci dit exactement que les normes N et N_1 sont équivalentes. Ce qui termine la démonstration du théorème. \square

2.2. Théorème. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , $(F, \| \cdot \|)$ un espace normé quelconque et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On munit E de n'importe quelle norme. Alors f est toujours continue.

Démonstration. Comme toutes les normes sur E sont équivalentes, on peut se donner la liberté d'en choisir une qui facilite le travail. Prenons la norme N_1 qu'on vient de considérer en utilisant une base (e_1, \dots, e_n) de E . On a :

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|f(e_i)\| \leq \eta \sum_{i=1}^n |x_i| = \eta N_1(x)$$

avec $\eta = \max_{i=1, \dots, n} \|f(e_i)\|$. Ce qui montre que f est continue. \square

3. Quelques exemples

Cette section est consacrée à des exemples d'applications linéaires continues (mais aussi non continues). Nous avons choisi de donner les plus simples et ceux qui apparaissent le plus souvent.

3.1. Sur l'espace $\ell^2(\mathbb{K})$

Le corps \mathbb{K} sera toujours \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On désigne par $\ell^2(\mathbb{K})$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des suites $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ dans \mathbb{K} telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$. On le munit de la norme :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

qui fait de $\ell^2(\mathbb{K})$ un espace de Banach.

Exemple 1. Soit $a = (a_1, \dots, a_n, \dots)$ une suite dans \mathbb{K} quelconque. À tout élément $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ de $\ell^2(\mathbb{K})$ on associe la suite $(a_1x_1, \dots, a_nx_n, \dots)$. On aimerait que ce soit encore un élément de $\ell^2(\mathbb{K})$! À cet effet, il est nécessaire et suffisant d'avoir $\sum_{n=1}^{\infty} |a_nx_n|^2 < +\infty$. On supposera $\alpha = \sup_{n \geq 1} |a_n| < +\infty$. On définit donc une application $T_a : E \longrightarrow E$ par :

$$T_a(x) = (a_1x_1, \dots, a_nx_n, \dots).$$

Elle est clairement linéaire. Montrons qu'elle est continue. En effet, on a :

$$\|T_a(x)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_nx_n|^2} \leq \alpha \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \alpha \|x\|_2.$$

Calculons sa norme $\|T_a\|$. Par définition $\|T_a\|$ est le sup de $\|T_a(x)\|_2$ lorsque x décrit la boule unité fermée de $\ell^2(\mathbb{K})$. L'inégalité qu'on vient d'établir nous dit que $\|T_a\| \leq \alpha$. Comme $\alpha = \sup_{n \geq 1} |a_n|$, il existe une sous-suite $(a_{\varphi(k)})$ de (a_n) telle que $|a_{\varphi(k)}| \rightarrow \alpha$. (Ici φ est une application strictement croissante $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$.) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $e^k = (e_1^k, \dots, e_n^k, \dots)$ le vecteur de $\ell^2(\mathbb{K})$ tel que :

$$e_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n = \varphi(k) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit facilement que $\|e^k\|_2 = 1$, ce qui montre que e^k est dans la boule unité fermée et $\|T_a(e^k)\|_2 = |a_{\varphi(k)}|$. Ceci montre que $\|T_a(e^k)\|_2$ tend vers α et donc $\|T_a\| = \alpha$. \square

Exemple 2. À tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ de $\ell^2(\mathbb{K})$ on associe la suite $(0, x_1, \dots, x_n, \dots)$. Au premier rang on met 0, au 2^{ème} on met le 1^{er}, au 3^{ème} on met le 2^{ème} et ainsi de suite... on décale tout à droite d'un cran ! Il est alors clair que $(0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ est dans $\ell^2(\mathbb{K})$. On définit donc une application, clairement linéaire :

$$T : x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2(\mathbb{K}) \longmapsto Tx = (0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2(\mathbb{K})$$

qu'on appelle *décalage à droite*. Notons $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ le vecteur $T(x)$. On a de façon évidente :

$$\|T(x)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \|x\|_2$$

qui montre que T est une isométrie de $\ell^2(\mathbb{K})$ donc a fortiori T est continue. La norme de T est bien entendu égale à 1. \square

3.2. Sur l'espace $C^0([a, b], \mathbb{K})$

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $E = C^0([a, b], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues (réelles ou complexes suivant que \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C}) sur $[a, b]$. On sait que tout élément f de E est une fonction continue, donc bornée. On pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

On définit ainsi sur E une norme qui en fait un espace de Banach.

Exemple 1. Soient c un point de $[a, b]$ et $\delta_c : E \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par $\delta_c(f) = f(c)$. Elle est clairement linéaire. Elle est aussi continue car :

$$|\delta_c(f)| = |f(c)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Sa norme $\|\delta_c\|$ est inférieure ou égale à 1 ; elle est atteinte en la fonction constante égale à 1 donc $\|\delta_c\| = 1$. \square

Exemple 2. Soit $P : E \rightarrow E$ l'application définie par $P(f)(x) = \int_a^x f(t) dt$. C'est l'application qui à toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ associe sa primitive s'annulant en a . Cette application est évidemment linéaire. D'autre part :

$$\|P(f)\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x |f(t)| dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty \leq (b-a)\|f\|_\infty$$

qui montre que P est continue de norme $\|P\|_\infty \leq (b-a)$. \square

3.3. Sur l'espace $C^\infty([0, 1], \mathbb{K})$

Soit $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables $[0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$. (En 0 on prend les dérivées à droite et en 1 les dérivées à gauche.) On le munit de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

pour laquelle E n'est pas complet ! On note D l'application linéaire $E \rightarrow E$ qui à f associe sa dérivée f' . Cette application n'est pas continue. En effet, considérons la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Elle est dans E et vérifie :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Mais la suite $(D(f_n))$ ne tend pas vers 0 puisque $\|D(f_n)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

3.4. Sur l'espace $\mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$

On note E l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions polynomiales $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur E . Seule la propriété de séparation n'est pas immédiate. Soit $f \in E$ telle que $\|f\| = 0$. Alors f est nulle sur $[0, 1]$; comme f est un polynôme, f est nulle partout sur \mathbb{R} (le nombre de zéros d'un polynôme est au plus égal à son degré).

Soit $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $T(f) = f\left(\frac{3}{2}\right)$. Alors T est linéaire. Mais elle n'est pas continue ; en effet, la suite de fonctions polynomiales $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ tend vers 0 mais la suite $(T(f_n))$ est telle que :

$$|T(f_n)| = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

et tend donc vers $+\infty$. □

CHAPITRE V

EXERCICES

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{et} \quad d_\infty(x, y) = \sup_{i=1, \dots, n} \{|x_i - y_i|\}.$$

- 1 - Montrer que d_1 et d_∞ sont des distances sur \mathbb{R}^n .
- 2 - Dessiner la boule unité centrée à l'origine pour chacune de ces distances dans le cas $n = 2$ et $n = 3$.
- 3 - Dans \mathbb{R}^2 , on pose $\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 < 1\}$. Montrer que Δ est un ouvert de l'espace métrique (\mathbb{R}^2, d_1) .

Exercice 2

Soit E un ensemble non vide. Pour $x, y \in E$, on pose $\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

- 1 - Montrer que δ est une distance sur E .
- 2 - Montrer que toute partie A de E est à la fois ouverte et fermée.

Exercice 3

On rappelle que le plan euclidien \mathbb{E} est l'ensemble \mathbb{R}^2 muni de la distance :

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Pour $x, y \in \mathbb{E}$, on pose $\delta(x, y) = \begin{cases} d_2(x, y) & \text{si } x, y \text{ et } 0 \text{ sont alignés} \\ d_2(x, 0) + d_2(0, y) & \text{sinon.} \end{cases}$

- 1 - Montrer que δ est une distance sur \mathbb{E} .
- 2 - Dessiner la boule unité centrée à l'origine. Même question pour une boule quelconque centrée ailleurs qu'à l'origine et de rayon $r > 0$.

La métrique δ est connue sous le nom de métrique de la SNCF.

Exercice 4

Soit $\phi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante telle que $\phi(0) = 0$ et vérifiant $\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y)$. Soit (E, d) un espace métrique ; pour tous $x, y \in E$, on pose :

$$\delta(x, y) = \phi(d(x, y)).$$

1 - Montrer que δ est une métrique sur E .

2 - Appliquer ce qui précède pour montrer que $d_1 = \frac{d}{1+d}$, $d_2 = \ln(1+d)$ et $\delta_\alpha = d^\alpha$ (avec $0 < \alpha < 1$) sont des métriques sur E .

Exercice 5

Soit (E, d) un espace métrique. Pour tous $x, y \in E$, on pose :

$$d_1(x, y) = \inf(1, d(x, y)) \quad \text{et} \quad d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

1 - Montrer que d_1 et d_2 sont des distances sur E .

2 - Montrer que d , d_1 et d_2 sont uniformément équivalentes deux à deux.

Exercice 6

On note E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Soit p un nombre réel tel que $p \geq 1$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ élément de E , on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1 - Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $p > 1$. Soient $q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dira que p et q sont *conjugués*) et α et β deux nombres réels positifs.

2 - Etablir l'inégalité :

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

3 - Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de E ; on note $x \times y$ le vecteur de E de composantes $(x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$. Utiliser la question 2 pour établir l'inégalité suivante (dite de Hölder) :

$$\|x \times y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

4 - Montrer que $\| \cdot \|_p$ est une norme sur E .

Exercice 7

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où a et b sont des réels tels que $a < b$). Soit p un nombre réel tel que $p \geq 1$. Pour tout élément $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On rappelle que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur E . Nous allons montrer que $\| \cdot \|_p$ en est une pour $p > 1$. Nous supposons donc dans toute la suite que $p > 1$. Soient $q \in]1, +\infty[$ le conjugué de p et α et β deux nombres réels positifs. On sait (cf. Exercice 6) que α et β vérifient l'inégalité :

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

1 - Établir l'inégalité suivante (dite de Hölder) :

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2 - Établir l'inégalité suivante (dite de Minkowski) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ et en déduire que $\| \cdot \|_p$ est une norme sur E .

Exercice 8 (Complété d'un espace métrique)

Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite dans X . Sur un espace complet, on dispose donc d'un critère permettant de décider de la convergence d'une suite sans connaître a priori sa limite ! Dire que (X, d) est non complet, c'est dire qu'il existe des suites de Cauchy qui n'y convergent pas. La question de savoir s'il est possible de rajouter ce qu'il faut pour qu'il le soit paraît alors toute naturelle.

Rappelons qu'une partie A de X est dite *dense* si, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$.

On appelle *complété* de (X, d) la donnée d'un triplet $(\widehat{X}, \widehat{d}, j)$ où $(\widehat{X}, \widehat{d})$ est un espace métrique complet et $j : X \longrightarrow \widehat{X}$ une application telle que :

i) pour tous $x, y \in X$, on ait $\widehat{d}(j(x), j(y)) = d(x, y)$ (j est donc une injection isométrique) ;

ii) l'image $j(X)$ de X par j est une partie dense de \widehat{X} .

Si $(\widehat{X}', \widehat{d}', j')$ est un autre complété de l'espace (X, d) , il existe une isométrie $\sigma : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{X}'$ telle que $j' = \sigma \circ j$. Le complété est donc unique à isométrie près. L'objet de l'exercice qui suit est de montrer qu'il existe toujours.

Soit (X, d) un espace métrique. On note E l'espace vectoriel des fonctions bornées $X \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la *norme de la convergence uniforme* : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ et de la distance associée d_∞ .

1 - Montrer que l'espace normé $(E, \| \cdot \|_\infty)$ est complet.

2 - Soit \mathcal{C} le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions continues bornées $X \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que \mathcal{C} est fermé dans E .

3 - Montrer que si d' est une autre distance uniformément équivalente à d , alors d et d' ont les mêmes suites de Cauchy.

On peut donc supposer que le diamètre $\delta(X) = \sup_{x, y \in X} d(x, y)$ est fini, quitte à remplacer d par une autre métrique qui lui est uniformément équivalente (par exemple $\inf(1, d)$ ou $\frac{d}{1+d}$).

Pour tout $a \in X$, on note f_a la fonction $f_a : X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in X$ associe le nombre $f_a(x) = d(x, a)$.

4 - Montrer que $f_a \in \mathcal{C}$ et que l'application $j : a \in X \longmapsto f_a \in \mathcal{C}$ est une injection isométrique.

5 - On note \widehat{X} l'adhérence de $j(X)$ dans \mathcal{C} et \widehat{d} la restriction de d_∞ à \widehat{X} . Montrer que l'espace métrique ainsi obtenu $(\widehat{X}, \widehat{d})$ est un complété de (X, d) .

Exercice 9 (Intégrale de Riemann)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On note E l'espace vectoriel des fonctions bornées $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

On rappelle (cf. exercice 8) que $(E, \| \cdot \|_\infty)$ est un espace de Banach. L'espace \mathcal{C} des fonctions continues $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en est un sous-espace fermé.

Une *subdivision* \mathcal{S} de l'intervalle $[a, b]$ est une suite finie de nombres réels t_0, t_1, \dots, t_n telle que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$; le *diamètre* de \mathcal{S} est le nombre $\delta(\mathcal{S}) = \sup_{i=1, \dots, n} |t_i - t_{i-1}|$. Une fonction $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite

étagée s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (t_0, \dots, t_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de ϕ à chaque intervalle $]t_{i-1}, t_i[$ (avec $i = 1, \dots, n$) soit une constante c_i ; une telle fonction s'écrit donc :

$$\phi = \sum_{i=1}^n c_i 1_{]t_{i-1}, t_i[}$$

(où $1_{]t_{i-1}, t_i[}$ est la fonction indicatrice de $]t_{i-1}, t_i[$) sur la réunion des intervalles ouverts $]t_{i-1}, t_i[$ (on ne s'occupe pas de ses valeurs aux points t_i). On note \mathcal{E} l'ensemble de telles fonctions.

1 - Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de E .

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est *uniformément continue*. Cela signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$(*) \quad \forall x, x' \in [a, b] : |x - x'| < \eta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

D'après ce qui précède, à tout $n \in \mathbb{N}^*$ correspond un $\eta_n > 0$ vérifiant la propriété (*) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

2 - Soit $\mathcal{S}_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{p_n} = b$ une subdivision de $[a, b]$ de diamètre $\delta_n < \eta_n$; on définit la fonction étagée $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}) & \text{si } x \in [t_{i-1}, t_i[\text{ pour } i = 1, \dots, p_n \\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Vérifier que $f_n \in \mathcal{E}$ et montrer que la suite (f_n) converge vers f pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Pour toute fonction étagée $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\phi = \sum_{i=1}^p c_i 1_{]t_{i-1}, t_i[}$$

sur la réunion des intervalles ouverts $]t_{i-1}, t_i[$ associés à une subdivision (t_0, \dots, t_p) de l'intervalle $[0, 1]$, on pose $I(\phi) = \sum_{i=1}^p c_i (t_i - t_{i-1})$.

Soit (f_n) une suite de fonctions étagées convergeant vers f pour la norme $\| \cdot \|_\infty$. (Une telle suite existe. La question 2 en donne une par exemple.)

3 - Montrer que la suite $(I(f_n))$ converge vers un nombre réel.

4 - Montrer que la limite précédente ne dépend pas de la suite (f_n) choisie. Ce nombre sera appelé *intégrale de Riemann* de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ et noté :

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On appelle *semi-norme* sur E toute application $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- i) $p(0) = 0$;
- ii) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$;
- iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tous $x, y \in E$.

Soit E l'espace des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Soit K un intervalle fermé borné de \mathbb{R} . Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

1 - Montrer que p_K est une semi-norme sur E et qu'elle n'est pas une norme.

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés de \mathbb{R} de réunion \mathbb{R} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la semi-norme p_{K_n} . Pour $f, g \in E$, on pose :

$$\delta(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf(1, p_n(f - g)).$$

2 - Montrer que cette série converge et que δ est une distance sur E invariante par translation.

3 - La distance δ provient-elle d'une norme ? (Justifier la réponse.)

Exercice 11

Soient r un entier naturel et E l'espace des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r . Soit s un entier tel que $0 \leq s \leq r$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_{\infty}^s = \max_{\ell=0, \dots, s} \left\{ \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(\ell)}(x)| \right\}.$$

1 - Montrer que $\|\cdot\|_{\infty}^s$ est une norme sur E . L'espace normé $(E, \|\cdot\|_{\infty}^s)$ est-il de Banach ?

2 - On note $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soient $\varphi_0, \dots, \varphi_r \in E$. Pour $f \in E$, on pose :

$$Df(x) = \sum_{\ell=0}^r \varphi_\ell(x) f^{(\ell)}(x).$$

L'application linéaire $D : E \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ainsi définie est-elle continue ?

Exercice 12

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E . On définit la distance d'un point $x \in E$ à A par $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$. On note α la fonction $E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $d(x, A)$. Montrer que α est lipschitzienne de rapport 1.

Exercice 13

Soit $(X_n, d_n)_{n \geq 1}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. On suppose que pour tout n , le diamètre de X_n est ≤ 1 . Sur $X = \prod_n X_n$, on définit une distance en posant, pour tous $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$:

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

1 - Montrer que les projections $\pi_n : (x_n) \in X \mapsto x_n \in X_n$ sont continues.

2 - Montrer que toute boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ dans X contient une partie de la forme :

$$\prod_{i=1}^N B(x_i, \eta) \times \prod_{j \geq N+1} X_j$$

où $x_i = \pi_i(x)$ et $B(x_i, \eta)$ est la boule de X_i de centre x_i et de rayon η avec $\eta < \varepsilon$.

3 - Montrer que pour qu'une application f d'un espace métrique (Y, δ) dans (X, d) soit continue il faut, et il suffit que, pour tout n , l'application $Y \xrightarrow{\pi_n \circ f} X_n$ soit continue.

4 - Montrer que si, pour tout n , l'espace X_n est complet, il en est de même de l'espace métrique (X, d) .

Exercice 14

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On note B sa boule unité ouverte et on considère l'application $\varphi : E \rightarrow B$ définie par : $\varphi(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$.

Montrer que φ est un homéomorphisme de E sur B .

Exercice 15

On munit l'espace \mathbb{R}^n de sa norme euclidienne usuelle $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. On considère les ensembles suivants :

$$M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}$$

$$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$$

et les applications $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\Psi_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies par :

$$\Psi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) \right)$$

$$\Psi_2(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \sqrt{1 + x_3^2}, x_2 \sqrt{1 + x_3^2}, x_3 \right).$$

1 - Montrer que M_1 est un ouvert de \mathbb{R}^2 et que M_2 et M_3 sont des fermés de \mathbb{R}^3 .

2 - Dessiner les ensembles M_2 et M_3 .

3 - Montrer que Ψ_1 envoie bijectivement M_1 sur M_2 et que Ψ_2 envoie bijectivement M_2 sur M_3 .

4 - Calculer les applications inverses $\Psi^{-1} : M_2 \longrightarrow M_1$ et $\Psi_2^{-1} : M_3 \longrightarrow M_2$.

5 - Montrer que les applications $\Psi_1 : M_1 \longrightarrow M_2$ et $\Psi_2 : M_2 \longrightarrow M_3$ sont des homéomorphismes.

Exercice 16

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

1 - Montrer que $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur E .

2 - Montrer qu'on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ pour toute fonction $f \in E$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ dans E définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [1/n, 1] \\ 1 - nx & \text{pour } x \in [0, 1/n] \end{cases}$$

3 - Calculer $\|f_n\|_1$, $\|f_n\|_2$ et $\|f_n\|_\infty$

4 - Montrer que deux quelconques de ces normes ne sont jamais équivalentes.

Licence 3 - Mathématiques
Année universitaire 2006-2007
Analyse 5 – S5MAANAS
Examen - 18 décembre 2006

DURÉE : 3 HEURES - DOCUMENTS NON AUTORISÉS

Question de cours

Soit (E, d) un espace métrique. On rappelle que (E, d) est *compact* si de toute suite $(x_n)_n$ de E on peut extraire une suite $(x_{n_k})_k$ convergente. Montrer que si (E, d) est compact alors il est complet.

Exercice 1

On définit l'application $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par $\delta(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

1 - Montrer que δ est une distance sur \mathbb{R} .

2 - Montrer que l'espace métrique (\mathbb{R}, δ) est complet.

Exercice 2

On rappelle que $X = [0, 1]$ muni de sa métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique connexe. Soit $\phi : X \longrightarrow X$ une application continue. Montrer que ϕ admet un point fixe *i.e.* il existe (au moins) $a \in X$ tel que $\phi(a) = a$.

Indication : Introduire la fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \phi(x)$ et utiliser le fait que X est connexe.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. On le munit de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et de la distance associée d définie par $d(f, g) = \|f - g\|$. On rappelle que l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach *i.e.* l'espace métrique sous-jacent (E, d) est complet. Pour toute fonction $f \in E$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose :

$$T(f)(x) = e^{-(x+2)} \int_0^x f(t) dt + x.$$

1 - Montrer que $T(f)$ est un élément de E et qu'on a ainsi une application bien définie $T : f \in E \longmapsto T(f) \in E$.

2 - Montrer que T est une application contractante *i.e.* il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel qu'on ait l'inégalité $\|T(f) - T(g)\| \leq \lambda \|f - g\|$ pour toutes fonctions $f, g \in E$.

3 - Montrer qu'il existe un unique élément $f \in E$ qui vérifie l'équation :

$$e^{-(x+2)} \int_0^x f(t) dt + x - f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

Exercice 4

On rappelle qu'un homéomorphisme entre deux espaces métriques X et Y est une application bijective $\psi : X \rightarrow Y$ telle que ψ et ψ^{-1} soient continues.

Tout intervalle de \mathbb{R} que l'on considérera sera muni de sa métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$. Soit J un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Montrer qu'il existe un homéomorphisme $\phi :]0, 1[\rightarrow J$ en en donnant un explicitement dans chacun des cas : $J =]-\infty, \varepsilon[$, $J =]\eta, +\infty[$ avec $\varepsilon, \eta \in \mathbb{R}$ et $J =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.

Corrigé

Question de cours

Soient $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n, p \geq N_0 \implies d(x_n, x_p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme E est compact, $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers un élément $x \in E$ *i.e.* il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$k \geq N_1 \implies d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $N = \max\{N_0, N_1\}$. Alors, pour $k \geq N$ on a :

$$s \geq N \implies d(x, x_s) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_s) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

qui montre que la suite $(x_n)_n$ converge vers x . L'espace métrique (E, d) est donc complet. \square

Exercice 1

1 - Vérifions les trois axiomes de distance. On a de façon évidente $\delta(x, y) = \delta(y, x)$. Il est clair aussi que $x = y$ implique $\delta(x, y) = 0$. Supposons $\delta(x, y) = 0$; alors $|x - y| = 0$ et donc $x = y$. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ et posons $a = |x - y|$, $b = |x - z|$ et $c = |z - y|$; on sait alors que $a \leq b + c$. Supposons, pour fixer les idées, que $c \leq b$ (ce n'est nullement une restriction). Alors $a + ab \leq (b + c) + a(b + c)$, c'est-à-dire $a(1 + b) \leq (1 + a)(b + c)$. On divise les deux membres de cette inégalité par le nombre réel strictement positif $(1 + a)(1 + b)$ et on obtient :

$$\frac{a}{1 + a} \leq \frac{b + c}{1 + b} = \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + b} \leq \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c}.$$

On a donc montré que $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$. Ceci montre que δ est bien une distance. \square

2 - Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans \mathbb{R} pour la distance δ . Soit $\varepsilon > 0$. On peut se contenter de prendre $\varepsilon < 1$ car $\delta(x, y) < 1$ pour tous $x, y \in E$. Faire varier ε dans $]0, 1[$ revient à faire varier $\eta = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$ (ce qui est équivalent à $\varepsilon = \frac{\eta}{1 + \eta}$) dans $]0, +\infty[$. Un calcul simple montre que $|x - y| < \eta$ si, et seulement si, $\delta(x, y) < \varepsilon$. Comme (x_n) est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(x_n, x_p) \leq \varepsilon$ pour $n, p \geq N$ et donc $|x_n - x_p| \leq \eta$ pour $n, p \geq N$. La suite (x_n) est donc de Cauchy pour la distance usuelle sur \mathbb{R} pour laquelle il est complet ; elle converge donc pour cette distance vers un réel x . Cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq k \implies |x_n - x| < \eta$; mais $|x_n - x| < \eta \implies \delta(x_n, x) < \varepsilon$ et donc $n \geq k \implies \delta(x_n, x) < \varepsilon$ qui montre que la suite (x_n) converge vers x pour δ ; l'espace métrique (E, δ) est donc complet. \square

Exercice 2

On a $f(0) = -\phi(0) \leq 0$ et $f(1) = 1 - \phi(1) \geq 1$. La fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ étant continue sur l'espace métrique connexe $[0, 1]$ et vérifie $f(0)f(1) \leq 0$, elle prend nécessairement la valeur 0 (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) *i.e.* il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 0$. Et donc $\phi(x) = x$, c'est-à-dire x est un point fixe de ϕ . \square

Exercice 3

1 - La fonction f étant continue, la fonction $x \in [0, 1] \longmapsto \int_0^x f(t)dt \in \mathbb{R}$ est continue (de classe C^1 même). Comme les fonctions $e^{-(x+2)}$ et x sont aussi continues, il en est de même pour $e^{-(x+2)} \int_0^x f(t)dt + x$ *i.e.* $T(f)$ est bien un élément de E . L'application T est donc bien définie sur E et à valeurs dans E . \square

2 - Soient f et g deux éléments de E . On a, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(g)(x)| &= \left| e^{-(x+2)} \int_0^x (f(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq e^{-(x+2)} \int_0^x |f(t) - g(t)| dt \\ &\leq e^{-(x+2)} \int_0^x \|f - g\| dt. \end{aligned}$$

En prenant le sup des deux membres pour x variant dans $[0, 1]$ on obtient :

$$\|T(f) - T(g)\| \leq \lambda \|f - g\|$$

avec $\lambda = e^{-2} \in]0, 1[$ qui montre bien que T est une application contractante dans l'espace normé $(E, \| \cdot \|)$. \square

3 - Un élément $f \in E$ qui vérifie l'équation :

$$e^{-(x+2)} \int_0^x f(t) dt + x - f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1]$$

n'est rien d'autre qu'un point fixe de T . Un tel élément existe car l'espace normé $(E, \| \cdot \|)$ est complet et $T : E \rightarrow E$ est contractante ! \square

Exercice 4

Les applications qui suivent sont clairement continues :

$$\phi_1 : t \in]0, 1[\mapsto (1 - t)a + tb = s \in]a, b[$$

$$\phi_2 : t \in]0, 1[\mapsto \text{Log}(t) + \varepsilon = s \in]-\infty, \varepsilon[$$

$$\phi_3 : t \in]0, 1[\mapsto -\text{Log}(t) + \eta = s \in]\eta, +\infty[.$$

Elles sont bijectives et ont pour inverses les applications :

$$\Phi_1^{-1}(s) = \frac{s - a}{b - a} \quad \phi_2^{-1}(s) = e^{(s - \varepsilon)} \quad \phi_3^{-1}(s) = e^{(\eta - s)}$$

qui sont aussi continues. Les trois applications ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont donc des homéomorphismes de $]0, 1[$ respectivement sur les intervalles $]a, b[,]-\infty, \varepsilon[$ et $]\eta, +\infty[$. \square

Licence 3 - Mathématiques
Année universitaire 2006-2007
Analyse 5 – S5MAANAS
Examen - 25 janvier 2007

DURÉE : 3 HEURES - DOCUMENTS NON AUTORISÉS

Question de cours

On dira qu'un espace métrique (X, d) est *compact* s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes qui suivent : i) de toute suite $(x_n)_n$ de X on peut extraire une suite $(x_{n_k})_k$ convergente ; ii) de tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de X on peut extraire un recouvrement fini $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$. Soient (X, d) un espace métrique compact, (Y, δ) un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On pose $Z = f(X)$. Montrer que Z est un compact de Y .

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et (e_1, \dots, e_n) sa base canonique. On le munit des trois normes :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

1 - Montrer qu'il existe des constantes réelles strictement positives $\kappa_1, \kappa'_1, \kappa_2$ et κ'_2 telles que, pour tout $x \in E$, on ait :

$$\kappa_1 N_1(x) \leq N_\infty(x) \leq \kappa'_1 N_1(x) \quad \text{et} \quad \kappa_2 N_2(x) \leq N_\infty(x) \leq \kappa'_2 N_2(x).$$

2 - En déduire que les trois normes N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes.

On note \mathcal{S}_1 la sphère unité de l'espace normé (E, N_1) *i.e.* l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $N_1(x) = 1$. On rappelle que \mathcal{S}_1 est un fermé borné de (E, N_1) et donc une partie compacte de (E, N_1) . Soit N une norme quelconque sur E .

3 - Montrer que l'application identité $j : (E, N_1) \longrightarrow (E, N)$ est continue. En déduire que \mathcal{S}_1 est une partie compacte de l'espace normé (E, N) .

4 - Montrer que l'application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue. En déduire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\inf_{x \in \mathcal{S}_1} N(x) = \alpha$ et $\sup_{x \in \mathcal{S}_1} N(x) = \beta$.

5 - En utilisant tout ce qui précède, montrer que N est équivalente à N_1 .

(Conclusion : toutes les normes sur E sont équivalentes.)

Exercice 2

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ un ensemble dénombrable ($x_n = x_p$ si, et seulement si, $n = p$). Pour tous $x_p, x_q \in X$, on pose :

$$d(x_p, x_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = q \\ 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 - Montrer que d est une distance sur X .

2 - Montrer que l'espace métrique (X, d) est complet.

Soit $f : X \longrightarrow X$ l'application définie par $f(x_n) = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 - Montrer que f vérifie $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$.

4 - Montrer que f n'a pas de point fixe.

5 - La réponse à la question 4 contredit-elle le *théorème du point fixe* pour une application contractante dans un espace métrique complet ?

Corrigé

Question de cours

C'est exactement la proposition 2.4 du chapitre III. □

Exercice 1

C'est exactement le théorème 2.1 du chapitre IV. □

Exercice 2

1 - Soient x_p et x_q deux éléments de E . Par définition si $x_p = x_q$, on a $d(x_p, x_q) = 0$. Supposons $x_p \neq x_q$; alors $d(x_p, x_q) = 1 + 1/p + 1/q$ qui est non nul. Donc d vérifie la propriété de séparation. La symétrie de d est immédiate. Montrons

que l'inégalité du triangle est vérifiée. Soient x_p, x_q et x_r trois éléments de E ; on les supposera deux à deux distincts (autrement la vérification est immédiate). On a :

$$d(x_p, x_q) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) + \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{q}\right) = d(x_p, x_r) + d(x_r, x_q).$$

2 - Une suite dans E est en fait une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ de la suite (x_n) . On va la noter $(z_k)_{k \geq 1}$ *i.e.*, pour tout $k \geq 1$, $z_k = x_{n_k}$. Supposons que (z_k) est de Cauchy. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$k, \ell \geq K \implies d(z_k, z_\ell) = d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) < \varepsilon.$$

Si on choisit $\varepsilon < 1$, l'inégalité $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) < \varepsilon$ n'est vérifiée que si $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) = 0$ *i.e.* $z_k = z_\ell = z_K$; la suite (z_k) n'est donc de Cauchy que si elle est stationnaire. Dans ce cas, elle est convergente. En résumé : toute suite de Cauchy dans E est stationnaire, donc convergente. L'espace métrique (E, d) est donc complet. \square

3 - Soient x_p et x_q deux éléments distincts de E . On a :

$$d(f(x_p), f(x_q)) = d(x_{p+1}, x_{q+1}) = 1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = d(x_p, x_q).$$

Ce qui est exactement la propriété qu'on cherche. \square

4 - Comme $x_p = x_q$ si, et seulement si $p = q$, pour tout $n \geq 1$ on a $f(x_n) = x_{n+1} \neq x_n$. Donc f ne fixe aucun point de E . \square

5 - La réponse à la question 4 ne contredit nullement le *théorème du point fixe* pour une application contractante dans un espace métrique complet ! En effet (E, d) est complet, f vérifie l'inégalité $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour $x \neq y$ mais il n'existe aucun $\alpha \in]0, 1[$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ car :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(f(x_n), f(x_{n+1}))}{d(x_n, x_{n+1})} = 1$$

i.e. f n'est pas une contraction de (E, d) . Nous ne sommes donc pas dans les hypothèses d'application du théorème du point fixe ! \square

Examen - 14 décembre 2007

DURÉE : 3 HEURES - DOCUMENTS NON AUTORISÉS

Question de cours

1 - Soit (E, d) un espace métrique. Quand dit-on que (E, d) est *compact* ? (Donner deux définitions équivalentes.) Montrer que si (E, d) est compact, alors son diamètre est fini.

2 - Soit E un ensemble non vide muni de la métrique discrète $\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que (E, δ) est compact si, et seulement si, il est fini.

Exercice 1

Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans E . On suppose que $(x_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ convergeant vers $x \in E$. Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers x .

Exercice 2

On munit l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 de sa norme euclidienne usuelle :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

et de la distance d associée. On pose $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1\}$.

1. Montrer que F est une partie fermée de l'espace métrique (\mathbb{R}^3, d) .
2. Dessiner la partie F et montrer qu'elle est connexe par arcs.

Exercice 3

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} muni de sa métrique usuelle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur I . On suppose que la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' sont strictement positives sur un intervalle $[a, b] \subset I$ (avec $a < b$) et $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

2. En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que pour tout $x \in [a, b]$ on a :

$$(1) \quad |\alpha - x| \leq \frac{|f(x)|}{f'(a)}.$$

Soient (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, x, y) et Δ_0 la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = b$. On note M_1 le point d'intersection de l'axe Ox avec Δ_0 .

3. Déterminer l'équation cartésienne de Δ_0 ainsi que l'abscisse x_1 du point M_1 .

On construit une suite de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite de droites $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

- $x_0 = b$;
- pour $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est la tangente à (C) au point d'abscisse x_n ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'abscisse du point M_n , intersection de l'axe Ox avec Δ_{n-1} .

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

5. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

6. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On notera θ sa limite.

7. Montrer que θ est égale à la solution $\alpha \in]a, b[$ de l'équation $f(x) = 0$ (cf. question 1).

CORRIGÉ

Question de cours

1. On dit qu'un espace métrique (E, d) est *compact* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes qui suivent :

i) De tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de E on peut extraire un recouvrement fini $\{U_{i_s}\}_{s=1, \dots, k}$.

ii) Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans E admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergente.

L'équivalence entre les assertions i) et ii) est donnée par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La famille (indexée par $x \in E$) de boules ouvertes $B(x, 1)$ est un recouvrement ouvert de E . Comme E est compact, on peut extraire de ce recouvrement ouvert un recouvrement fini $B(x_1, 1), \dots, B(x_n, 1)$. On pose :

$$\alpha = \sup_{i,j=1,\dots,n} d(x_i, x_j) < +\infty.$$

Alors : $\text{diamètre}(E) \leq \alpha + 2 < +\infty$. En effet, si $x, y \in E$, il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $x \in B(x_i, 1)$ et $y \in B(x_j, 1)$. D'où :

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq 1 + \alpha + 1 = \alpha + 2.$$

2. Rappelons que dans un espace métrique discret (E, δ) , toute partie de E est ouverte ; en particulier tout singleton $U_x = \{x\}$ est un ouvert. La famille $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in E}$ est donc un recouvrement ouvert de E . Si (E, δ) est compact, de \mathcal{U} on peut extraire un recouvrement fini $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. L'ensemble E est alors contenu dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ donc fini. Réciproquement, supposons E fini *i.e.* $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de E . Alors tout $x_k \in E$ est contenu dans un U_{i_k} ; E est donc contenu dans $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ *i.e.* $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ est un recouvrement ouvert fini extrait de \mathcal{U} ; ce qui montre que (E, δ) est compact.

Exercice 1

Soit $\varepsilon > 0$. Comme (x_n) est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x_n, x_p) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n, p \geq N_1$. Comme $(x_{n_k})_k$ converge vers x , il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k \geq N_2$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors, pour $n, k \geq N$: $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ qui montre que la suite (x_n) converge vers x .

Exercice 2

1 - La fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$ est continue. La partie F n'est rien d'autre que l'image réciproque par ϕ du fermé $\{0\}$; elle est donc fermée.

2 - Il est conseillé de faire un dessin pour bien suivre le raisonnement !

Soient $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_2, b_3)$ deux points distincts de F . Si $a_3 = b_3$, les points a et b sont sur le même cercle Γ_a , trace du plan horizontal d'équation $x_3 = a_3$ sur la partie F . On passe donc de a à b en restant sur Γ_a par un chemin continu (car Γ_a est connexe par arcs). Supposons $a_3 \neq b_3$. Le cercle Γ_a est centré au point $(0, 0, a_3)$ et de rayon $\sqrt{a_3^2 + 1}$. Ce cercle coupe le demi-plan ouvert \mathcal{P}_+ défini par $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$ en un point m . Le demi-plan \mathcal{P}_+ coupe F en la courbe \mathcal{H} d'équation $x_2^2 - x_3^2 = 1$ (c'est une branche d'hyperbole). La courbe \mathcal{H} coupe le plan horizontal d'équation $x_3 = b_3$ en un point n du cercle Γ_b , intersection de ce plan et de F ; Γ_b a pour centre le point $(0, 0, b_3)$ et pour rayon $\sqrt{b_3^2 + 1}$. Le chemin qu'il faut emprunter pour aller de a vers b tout en restant dans F est le suivant : on part de a et on suit le cercle Γ_a jusqu'au point m ; on suit la courbe \mathcal{H} jusqu'au point n , ensuite on suit le cercle Γ_b jusqu'au point b ! On sait donc relier deux points quelconques de F par un chemin (continu) contenu dans F ; ceci montre que F est connexe par arcs. (Le lecteur peut remarquer qu'on n'a pas besoin des arcs sur les cercles Γ_a et Γ_b si les points a et b sont sur un même demi-plan vertical délimité par l'axe Ox_3 : un morceau d'hyperbole suffit.)

Exercice 3

1 - La fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$; comme $[a, b]$ est connexe, elle prend nécessairement la valeur 0 *i.e.* il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Comme f est en plus strictement croissante, ce α est unique.

2 - La fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 ; d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(x) - f(\alpha) = f'(c)(x - \alpha)$ *i.e.* (tenant compte de $f(\alpha) = 0$) $f(x) = f'(c)(x - \alpha)$. Comme $f'' > 0$, f' est strictement croissante sur $[a, b]$; en plus f' est strictement positive sur $[a, b]$; d'où $f'(c) > f'(a) > 0$. Ce qui nous donne l'inégalité cherchée :

$$(1) \quad |\alpha - x| \leq \frac{|f(x)|}{f'(a)}.$$

3 - On cherche l'abscisse x_1 du point M_1 . La droite Δ_0 a une pente égale à $f'(x_0) = f'(b)$ et passe par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Elle a donc pour équation $Y = (X - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$. L'abscisse x_1 de l'intersection de Δ_0 avec l'axe Ox est obtenue en faisant $Y = 0$; ce qui donne $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

4 - On raisonne exactement de la même manière en remplaçant x_0 par x_n , la droite Δ_0 par Δ_n et le point M_1 par M_{n+1} . La droite Δ_n a ainsi pour équation

$Y = (X - x_n)f'(x_n) + f(x_n)$. Par conséquent le point M_{n+1} a pour abscisse :

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

5 - Sur l'intervalle $[a, b]$, $f'' > 0$ et donc f y est strictement convexe (*i.e.* vérifie l'inégalité $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ pour tous $x, y \in [a, b]$ et tout $\lambda \in [0, 1]$). Par suite, la pente de la droite passant par les points $(\alpha, 0)$ et $(b, f(b))$ est strictement plus petite que $f'(b)$ qui est celle de la tangente Δ_0 à la courbe au point $(b, f(b))$. Donc $x_1 > \alpha$. Le même argument permet de montrer que $x_n > \alpha$ pour tout $n \geq 0$. On a donc $f(x_n) > 0$ pour tout n ; comme en plus $f'(x_n) > 0$, on en déduit $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0$ *i.e.* la suite (x_n) est décroissante.

6 - La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ étant minorée par α et décroissante, elle converge vers un $\theta \in [\alpha, b]$.

7 - La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers θ et f et f' sont continues avec f' constamment non nulle sur $[a, b]$; on a donc :

$$\frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right)}{f'\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n+1}) = 0.$$

Ceci montre que $f(\theta) = 0$ et donc $\theta = \alpha$ puisque α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$.

Examen - 16 janvier 2008

DURÉE : 3 HEURES - DOCUMENTS NON AUTORISÉS

Questions de cours

- 1 - Quand dit-on qu'un espace métrique (E, d) est *connexe* ? *connexe par arcs* ?
- 2 - Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application continue. On suppose E connexe. Montrer que l'image $Y = f(E)$ de E par f est une partie connexe de F .
- 3 - On rappelle que l'intervalle $[0, 1]$ de \mathbb{R} muni de sa métrique usuelle est connexe (vu en cours). Montrer qu'un espace métrique (E, d) connexe par arcs est connexe.

Exercice 1

On munit l'intervalle $[0, 1]$ de sa métrique usuelle. Soit $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application continue.

Montrer que ϕ admet un point fixe *i.e.* il existe $x \in [0, 1]$ tel que $\phi(x) = x$.
(Penser à introduire la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \phi(x)$.)

Exercice 2

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On suppose que la fonction dérivée $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée *i.e.* il existe une constante réelle $M > 0$ telle que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$.

Montrer que f est lipschitzienne de rapport $k = \sup_{x \in I} |f'(x)|$.

Exercice 3

On note \mathcal{B} l'espace vectoriel des fonctions bornées $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et de la distance associée d définie par

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$.

1 - Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit $f(x)$ sa limite.

2 - Montrer que la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi obtenue est bornée.

3 - Montrer que la suite (f_n) converge vers f pour la norme $\| \cdot \|$.

L'espace normé $(\mathcal{B}, \| \cdot \|)$ est donc complet. Soit \mathcal{C} le sous-espace de \mathcal{B} dont les éléments sont les fonctions continues $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

4 - Montrer que \mathcal{C} est fermé dans \mathcal{B} .

Soit $T : \phi \in \mathcal{C} \longmapsto T(\phi) \in \mathcal{C}$ l'application définie par :

$$T(\phi)(x) = \frac{1}{x+2} \int_0^x \phi(t) dt + 1.$$

5 - Montrer que T est une application contractante *i.e.* il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que $\|T(\phi) - T(\psi)\| \leq k\|\phi - \psi\|$ pour tous éléments $\phi, \psi \in \mathcal{C}$.

On définit une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{C} par $\phi_0 = 1$ et $\phi_n = T(\phi_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

6 - Calculer ϕ_1 et ϕ_2 .

7 - Montrer que la suite (ϕ_n) converge dans \mathcal{C} vers l'unique solution ϕ de l'équation qui suit (dite *équation fonctionnelle*) :

$$\frac{1}{x+2} \int_0^x \phi(t) dt - \phi(x) + 1 = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$