

UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
Master 1 – Mathématiques 2009-2010
Analyse fonctionnelle

A. EL KACIMI

Contenu de l'enseignement

1 - Espaces normés

- 1.1. Généralités sur les espaces normés
- 1.2. Espaces de Banach
- 1.3. Espaces fonctionnels L^p et $C^k([a, b], \mathbb{K})$

2 - Applications linéaires continues

- 2.1. Leur caractérisation. L'espace normé $L_c(E, F)$
- 2.2. Le théorème de l'application ouverte
- 2.3. Étude d'exemples concrets

3 - Dualité dans les espaces normés

- 3.1. Formes linéaires continues. Dual topologique
- 3.2. Les formes géométrique et analytique du théorème de Hahn-Banach
- 3.3. Réflexivité

4 - Espaces de Hilbert

- 4.1. Généralités. Projection orthogonale
- 4.2. Dualité dans les espaces de Hilbert
- 4.3. Sommes et bases hilbertiennes
- 4.4. Séries de Fourier

5 - Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert

- 5.1. Généralités
- 5.2. Opérateurs compacts
- 5.3. Opérateurs hermitiens
- 5.4. Décomposition spectrale d'un opérateur hermitien compact

Répartition des sujets des séminaires

1. Les espaces L^p pour $p \in [1, +\infty]$ (Aziz EL KACIMI)

Objet de l'exposé : Les espaces L^p sont les espaces fonctionnels naturels de la théorie de la mesure et de l'intégrale. Leur étude est fondamentale. Ils sont complets et ont des propriétés intéressantes ; c'est ce que devrait montrer cet exposé.

Références : La référence [Ek] suffit : les espaces L^p y sont traités sous forme de problèmes.

2. Le théorème de Stone Weierstass (Alpha DIALLO)

Objet de l'exposé : La continuité d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une bonne propriété, en général. Toutefois, on ne peut pas la dériver et cela risque de bloquer un élève de Terminale si on lui demande d'étudier le sens de variation de f : son premier réflexe est justement de calculer f' ! Peut-on alors remplacer, à ε -près, f par une fonction plus régulière ? Mieux encore : existe-il un polynôme $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ qui puisse approcher f à ε -près ? Oui, il est donné par le théorème de Stone Weierstass !

Références : Adapter la démonstration de [Le] ou [Ko] à l'intervalle $[a, b]$ et à l'algèbre des fonctions polynômes $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

3. Espaces de Hilbert. Projection orthogonale (Simon SPROCQ)

Objet de l'exposé : Ce sont des cas particuliers d'espaces de Banach : leur norme est associée à un produit scalaire, ce qui permet d'y faire de la géométrie. L'exposé doit les introduire avec des exemples représentatifs et démontrer le théorème de projection orthogonale.

Références : On peut utiliser [Ek], [Le] ou toute autre référence citée.

4. Dualité dans les espaces de Hilbert (Aziz EL KACIMI)

Objet de l'exposé : En général, le dual topologique d'un espace de Banach peut être compliqué ! Mais la géométrie qu'il y a dans un Hilbert permet de décrire de façon simple toutes ses formes linéaires continues. C'est à cette tâche que doit s'atteler l'auteur de cet exposé !

Références : On peut utiliser [Ek], [Le] ou toute autre référence citée.

5. Sommes et bases hilbertiennes (Xavier HENRY)

Objet de l'exposé : Quand il n'est pas de dimension finie, un espace de Hilbert est quand même assez grand ! Mais souvent (et c'est toujours dans les situations intéressantes fort heureusement) on peut le décomposer en sous-espaces de dimension finie (1 en fait). C'est l'existence de bases dites *hilbertiennes* qui permet de faire cela.

Références : On peut utiliser [Ek], [Le] ou toute autre référence citée.

6. Séries de Fourier (Landry LAVOINE)

Objet de l'exposé : Comme on l'aura vu dans l'exposé 5, tous les espaces de Hilbert ayant une base hilbertienne dénombrable (ils seront dits *séparables*) sont isomorphes ! Les fonctions mesurables de carré intégrable sur le cercle \mathbb{S}^1 en forment le plus beau : $L^2(\mathbb{S}^1)$!

Celui-ci possède une belle base hilbertienne qui permet de décomposer toute fonction $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ sous forme d'une série assez connue dans le folklore : la série de Fourier d'une fonction !

Références : On peut utiliser [Ek], [Le], [Ko] ou toute autre référence citée.

7. Opérateurs bornés : définitions et exemples (Jena-François MONIER)

Objet de l'exposé : Les opérateurs apparaissent de façon naturelle dès qu'on a à résoudre des équations différentielles ou intégrales. Ils sont plus manipulables bien sûr lorsqu'ils sont continus (on dit alors qu'ils sont *bornés*).

Références : Il est suffisant d'utiliser [Ek].

8. Opérateurs compacts (Benjamin LENOIR)

Objet de l'exposé : Certes, un opérateur borné envoie une partie bornée sur une autre partie bornée mais cette propriété, aussi bonne soit-elle, s'avère quelquefois inopérante pour certains problèmes. Les opérateurs compacts permettent de pallier ce problème. Leur définition est assez simple mais leur richesse est assez dense ! L'exposé doit révéler ce côté un peu mystique !

Références : Il est suffisant d'utiliser [Ek].

9. La notion de spectre (Arnaud RODEVY)

Objet de l'exposé : L'importance des valeurs propres d'endomorphismes en dimension finie est incontestable ! Qu'en est-il en dimension infinie ? Ce n'est pas aussi simple que cela : une injection linéaire n'est pas toujours surjective ! C'est ce qui amène à la notion de valeur spectrale et donc de *spectre* d'un opérateur. Elle est fondamentale en analyse ! L'objet de l'exposé est d'explicitier toute la "philosophie" qu'il y a derrière.

Références : Il est suffisant d'utiliser [Ek].

10. Spectre d'un opérateur compact (Aziz AKHARTOUNE)

Objet de l'exposé : Comme on vient de le mentionner, la notion de spectre d'un opérateur borné est importante. Lorsque celui-ci est compact, la structure du spectre est assez particulière : les valeurs spectrales non nulles sont en fait des valeurs propres ; le spectre est dénombrable et n'a au plus que 0 comme point d'accumulation.

Références : Il est suffisant d'utiliser [Ek].

11. Opérateurs hermitiens (Jérémy GOSTEAU)

Objet de l'exposé : Dans l'algèbre des opérateurs bornés sur un Hilbert, ils jouent un rôle similaire à celui que jouent les nombres réels dans le corps des nombres complexes : ils coïncident avec leur adjoint comme un réel coïncide avec son conjugué ! Ils ont alors une place à part que doit montrer l'exposé.

Références : Il est suffisant d'utiliser [Ek].

12. Le théorème de décomposition spectrale (Clémence BERNARD)

Objet de l'exposé : Il dit que tout opérateur hermitien compact sur un espace de Hilbert séparable se décompose complètement en homothéties sur une suite de sous-espaces de dimension finie qui remplissent l'espace. En ce sens un tel opérateur s'apparente fortement à une matrice hermitienne. C'est un beau théorème qui ne peut être ignoré par un étudiant de Master 1 !

Références : Il est suffisant d'utiliser [Ek].

Emploi du temps des divers exposés

Semaine	Date	Nom	Titre
46	09/11/2009	..A. EL KACIMI	<i>Les espaces L^p</i>
		A. DIALLO	<i>Le théorème de Stone-Weierstrass</i>
	10/11/2009	..S. SPROCQ	<i>Espaces de Hilbert. Projection orthogonale</i>
		A. EL KACIMI	<i>Séance de TD</i>
47	16/11/2009	..X. HENRY	<i>Sommes et bases hilbertiennes</i>
		A. EL KACIMI	<i>Dualité dans les espaces de Hilbert</i>
	17/11/2009	..L. LAVOINE	<i>Séries de Fourier</i>
		A. EL KACIMI	<i>Séance de TD</i>
48	23/11/2009	..J.-F. MONIER	<i>Opérateurs bornés : définitions et exemples</i>
		B. LENOIR	<i>Opérateurs compacts</i>
	24/11/2009	..A. RODEVY	<i>La notion de spectre</i>
		A. EL KACIMI	<i>Séance de TD</i>
49	30/11/2009	..A. AKHARTOUNE ...	<i>Spectre des opérateurs compacts</i>
		A. EL KACIMI	<i>Séance de TD</i>
	01/12/2009	..J. GOSTEAU	<i>Opérateurs hermitiens</i>
		C. BERNARD	<i>Décomposition spectrale</i>

Lundi de 13 h 00 à 14 h 30 et de 14 h 45 à 16 h 15 Salle 010S

Mardi de 13 h 00 à 14 h 30 et de 14 h 45 à 16 h 15 Salle 004S

Bibliographie

- [Br] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson (1987).
- [CCM] CHRISTOL, G., COT, A. & MARLE, C.-M. *Topologie*. Collection Mathématiques pour le Second Cycle, Ellipses (1997).
- [Ek] EL KACIMI, A. *Éléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques pour le Second Cycle, Ellipses (1999).
- [KF] KOLMOGOROV, A. & FOMINE, S. *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Editions MIR (1974).
- [Ko] KOMORNIK, V. *Précis d'analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques pour le Second Cycle, Ellipses (2002).
- [Le] LEHMANN, D. *Initiation à la topologie générale..* Collection Mathématiques pour le Second Cycle, Ellipses (2004)
- [Ru] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. Tata McGraw Hill (1974).
- [Sc] SCHWARTZ, L. *Topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann (1970).