Introduction à la théorie des sous- et des sur-solutions

Jalel Tabka
Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis
LAMAV, FR CNRS 2956,
Institut des Sciences et Techniques de Valenciennes
F-59313 Valenciennes Cedex 9, France
Jalel.Tabka@univ-valenciennes.fr

12 juillet 2011

Introduction

Ce travail trouve son origine dans quatre exposés faits par Colette De Coster qui ont porté sur la méthode dite des sous- et sur-solutions, aux mois d'octobre et novembre 2009, dans la cadre d'un groupe de travail du LAMAV. L'objet de ce travail, inspirée de ces exposés, est de faire une introduction à cette méthode.

La méthode des sous- et sur-solutions donne l'existence et la localisation d'une solution d'un problème aux limites en présence d'un couple de fonctions, appelées sous-solution et sur-solution, bien ordonné. Ces sous- et sur-solutions peuvent être considérées comme des approximations de la solution avec une erreur de signe constant.

Les questions qui se posent à propos de la méthode des sous- et sur-solutions sont multiples : Pour quel type de problèmes a-t-on ce genre de résultat ? Peut-on approcher la solution ainsi obtenue ? Dans les applications, comment fait-on pour trouver ces sous- et sur-solutions ? Que se passe-t-il dans le cas où ce couple de fonctions n'est pas bien ordonné ? Quels sont les liens entre cette théorie et d'autres, telles que la théorie du degré ou les méthodes variationnelles qui permettent d'obtenir des résultats de multiplicité ? Autant de questions qui ont déjà donné lieu à de nombreuses publications ou qui font encore l'objet de recherche.

Vu la dimension restreinte de ce travail, nous ne considérons bien sûr pas toutes ces questions.

Dans ce travail, nous nous sommes fixés comme cadre le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui a l'avantage d'être assez général pour inclure beaucoup de problèmes mais assez simple pour ne pas masquer les idées principales derrière un excès de technique. Ces notes sont fortement

inspirées de [2] où le cadre est, par contre celui des équations différentielles ordinaires.
Le plan que nous allons adopter dans ce travail est le suivant.
Dans la partie 1, constituée de généralités, seront donnés un certain nombre de rappels d'outils de l'Analyse Mathématique auxquels nous aurons recours fréquemment et les définitions des notions de sous-solution et de sur-solution.
Dans la partie 2, le lecteur trouvera une discussion des implications de l'existence d'une paire de sous- et sur-solutions bien ordonnées. Ces implications concernent l'existence, la localisation d'une solution ainsi que des informations sur la structure de l'ensemble des solutions.
Dans la partie 3, sera fait le lien avec la théorie du degré de Leray-Schauder qui est un outil qui permet d'obtenir des résultats de multiplicité. En particulier, nous montrerons le théorème des trois solutions d'Amann qui permet d'obtenir l'existence de trois solutions en présence de deux paires de sous- et sur-solutions vérifiant certaines relations d'ordre.
A la Remarque 2.4, nous verrons que la seule existence d'une paire de sous- et sur-solution (sans ordre) ne suffisent pas, en général, à assurer l'existence d'une solution. La partie 4 est dédiée à des situations où l'existence d'une paire de sous- et sur-solution, sans relation d'ordre, permet d'obtenir l'existence d'une solution. Nous nous intéresserons aussi à des résultats de multiplicité.
La partie 5 est une première réponse à la question de reconnaitre, dans les applications, si les hypothèses d'un problème permettent de trouver des sous- et sur-solutions. A titre d'exemple, nous considérons la recherche de solutions positives. Nous n'avons pas traité cette application avec le maximum de généralité.

1. Généralités : notations, formulation du problème principal, rappels, notions de sous-solution et sur-solution

Notations 1.1 : n désigne un entier strictement positif et p désigne un réel supérieur ou égal à 1. Ω désigne un domaine (ouvert connexe) borné régulier de $I\!R^n$.

On note $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ constitué des fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$ et nulles sur $\partial\Omega$. En tant que sous-espace vectoriel normé de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, muni de sa norme naturelle $\|.\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}$, $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach.
On désigne pas f une fonction définie sur une partie E non vide de $\Omega \times I\!R$.

Nous considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

Précisons le type d'hypothèses que nous mettrons sur f ainsi que l'espace dans lequel nous chercherons la fonction inconnue u.

Définition 1.1 : Soit $f : \Omega \times I\!R \longrightarrow I\!R$. On dit que f est L^p-**Carathéodory** si elle vérifie les conditions suivantes :
(i) Pour tout $y \in I\!R$, $f(.,y)$ est mesurable sur Ω.
(ii) Pour p.p. $x \in \Omega$, $f(x,.)$ est continue sur $I\!R$.
(iii) $\forall R > 0$, $\exists h_R \in L^p(\Omega)$ telle que $\forall$ p.p. $x \in \Omega$, $\forall y \in [-R, R]$, $|f(x,y)| \leq h_R(x)$.

Définition 1.2 : Etant données deux fonctions a , b : $\Omega \longrightarrow I\!R$, bornées et telles que $a \leq b$, on définit une partie E de $I\!R^{n+1}$ en posant $E = \{(x,y) \in \Omega \times I\!R \mid a(x) \leq y \leq b(x)\}$.
Pour tout $y \in I\!R$, on note $A_y = \{x \in \Omega \mid a(x) \leq y \leq b(x)\}$.
Soit $f : E \longrightarrow I\!R$. On dit que f est L^p-**Carathéodory** si elle vérifie les conditions suivantes :
(i) Pour tout $y \in I\!R$ tel que $A_y \neq \emptyset$, la fonction $f(.,y)$, définie sur A_y, est mesurable.
(ii) Pour p.p. $x \in \Omega$, $f(x,.)$ est continue sur $[a(x), b(x)]$.
(iii) $\exists h \in L^p(\Omega)$ telle que $\forall (x,y) \in E$, $|f(x,y)| \leq h(x)$.

Remarque 1.1 : Soit $f : \Omega \times I\!R \longrightarrow I\!R$.
Si f vérifie les conditions de la Définition 1.1, alors f vérifie les conditions de la Définition 1.2 pour toute partie E de $\Omega \times I\!R$ définie comme dans la Définition 1.2.

Exemple 1.1 : Une fonction f définie sur $\Omega \times I\!R$ par $f(x,y) = g(x) + h(y)$ ou $f(x,y) = g(x)h(y)$, avec $g \in L^p(\Omega)$ et $h \in \mathcal{C}(I\!R)$, est L^p-Carathéodory.

On note $W^{2,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ | \ \forall i,j \in [\![1,n]\!] \,,\ D_i u \,,\ D_{ij} u \ \in L^p(\Omega)\}$.

Nous cherchons une fonction $u \in W^{2,p}(\Omega)$ qui soit solution de (1.1).

Nous supposons $p > n$; de sorte que $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow_c \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Notons T_1 l'opérateur $T_1 : \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, $v \longmapsto T_1(v)$, où $u = T_1(v)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, v(x)) & \text{dans } \Omega \,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \,. \end{cases}$$

Une solution u de (1.1) apparait comme un point fixe de l'opérateur T_1.

Faisons quelques rappels.

<u>Rappel 1.1 :</u> Si on désigne par g une fonction appartenant à $L^p(\Omega)$ et que l'on considère le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = g(x) & \text{dans } \Omega \,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \,, \end{cases} \tag{1.2}$$

ce problème admet une seule solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

De plus, $\exists C > 0$, $\exists C' > 0$ (C et C' constantes indépendantes de g) telles que $\forall g \in L^p(\Omega)$, la solution u de (1.2), vérifie

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^p(\Omega)} \ \text{ et } \ \|u\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} \leq C' \|g\|_{L^p(\Omega)} \,. \tag{1.3}$$

<u>Rappel 1.2 :</u> (**Théorème du point fixe de Schauder**)

Soit X un espace de Banach et soit R un réel strictement positif.

Si $T : B(0_X, R) \longrightarrow B(0_X, R)$ est un opérateur complètement continu (c'est-à-dire continu et tel que, pour toute partie bornée D de X, $\overline{T(D)}$ est compacte), alors T admet au moins un point fixe.

<u>Rappel 1.3 :</u> (**une des formes du principe du maximum**)

Si $w \in W^{2,p}(\Omega)$, avec $p > n$, vérifie $\forall$ p.p. $x \in \Omega$, $-\Delta w(x) \leq 0$, alors w ne peut pas atteindre un maximum $M \geq 0$ dans Ω sauf si w est constante.

<u>Rappel 1.4 :</u> (**une forme du principe du maximum de Hopf**)

On considère une fonction $w \in W^{2,p}(\Omega)$, avec $p > n$. Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et B une boule ouverte contenue dans Ω et telle que $x_0 \in \partial B$.

Si $\forall$ p.p. $x \in B, -\Delta w(x) \geq 0$ et $w(x) > w(x_0)$, pour tout $x \in B$, alors $\dfrac{\partial w}{\partial n}(x_0) < 0$, avec n qui désigne la normale sortante à Ω au point x_0.

Définition 1.3 : Soient $\alpha, \beta \in W^{2,p}(\Omega)$.

On dit que α est une **sous-solution** (resp. β est une **sur-solution**) **du problème** (1.1) si :

(i) $\forall$ p.p. $x \in \Omega$, $-\Delta\alpha(x) \leq f(x, \alpha(x))$ (resp. $-\Delta\beta(x) \geq f(x, \beta(x))$).

(ii) $\forall x \in \partial\Omega$, $\alpha(x) \leq 0$ (resp. $\beta(x) \geq 0$).

Remarque 1.2 : Si u est une solution de (1.1), il est évident qu'elle est à la fois une sous-solution et une sur-solution.

Définition 1.4 : Une sous-solution ou une sur-solution de (1.1) est dite **propre**, si elle n'est pas une solution de (1.1).

Nous terminons cette partie par une notation dont nous nous servirons fréquemment.

Notation 1.2 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.

Etant données trois fonctions a, b et u définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $u \in [a, b]$ le fait que $\forall x \in A$, $a(x) \leq u(x) \leq b(x)$.

Notations 1.3 :

(N1) On désigne par $\mathcal{C}_{\geq 0}$ le cône : $\mathcal{C}_{\geq 0} = \{u \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \ \mid \ u \geq 0\}$.

(N2) Etant données deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$, on écrit $u >> v$, pour exprimer que : $u - v \in Int_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}(\mathcal{C}_{\geq 0})$. Autrement dit,

$$u >> v \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \ , \ \ u(x) - v(x) > 0 \ , \\ \forall x \in \partial\Omega \ , \ \ u(x) - v(x) > 0 \quad \text{où} \ \ (u(x) - v(x) = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial}{\partial n}(u-v)(x) < 0) \ , \end{array} \right.$$

si l'on désigne par n la normale sortante à Ω au point x.

2. Existence et localisation d'une solution de (1.1) grâce à une sous-solution et une sur-solution de (1.1) bien ordonnées

Le théorème suivant est fondamental. Il donne des conditions suffisantes d'existence et de localisation d'une solution pour (1.1).

Théorème 2.1 : Soient α et β respectivement une sous-solution et une sur-solution de (1.1), vérifiant $\alpha \leq \beta$.

Si $f : E \longrightarrow I\!R$ est L^p-Carathéodory avec $E = \{(x,y) \in \Omega \times I\!R \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ et $p > n$, alors (1.1) admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Preuve : Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, \gamma(x, u(x))) & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\text{avec } \gamma \text{ définie par : } \forall z \in I\!R,\ \gamma(x,z) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } z < \alpha(x)\,, \\ z & \text{si } \alpha(x) \leq z \leq \beta(x)\,, \\ \beta(x) & \text{si } z > \beta(x)\,. \end{cases}$$

Notons d'abord que $\forall x \in \Omega\,, \forall z \in I\!R,\ \alpha(x) \leq \gamma(x,z) \leq \beta(x)$ et $(x, \gamma(x,z)) \in E$.

D'après l'hypothèse sur f, nous avons

$$\exists h \in L^p(\Omega) \ \mid\ \forall \text{ p.p. } x \in \Omega\,, \forall z \in I\!R,\ |f(x, \gamma(x,z))| \leq h(x)\,. \tag{2.2}$$

•• *Première étape :* Le problème (2.1) a au moins une solution.

Appliquons le Théorème du point fixe de Schauder (cf. Rappel 1.2) à l'opérateur $T_2 : \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, où $u = T_2(v)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, \gamma(x, v(x))) & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

• *Soit $v \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$. Montrons que T_2 est continu en v.*

Considérons une suite (v_n) d'éléments de $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$ qui converge vers v dans $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$.

Pour tout $w \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, notons $g_w : \Omega \longrightarrow I\!R$, $x \longmapsto f(x, \gamma(x, w(x)))$. Nous avons alors, g_w mesurable et pour p.p. $x \in \Omega$, $|g_w(x)| \leq h(x)$ et, de ce fait, $g_w \in L^p(\Omega)$.

Notons $\psi : \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^p(\Omega)$, $w \longmapsto g_w$.

D'après (1.3), nous avons :

$$\exists C' > 0 \text{ tel que } \forall n \in I\!N,\ \|T_2(v_n) - T_2(v)\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} \leq C' \|\psi(v_n) - \psi(v)\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

Pour montrer que T_2 est continu en v, il nous suffit de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi(v_n) = \psi(v)$ dans $L^p(\Omega)$.

Une disjonction des cas (selon les positions relatives respectives de $v_n(x)$ et $v(x)$ par rapport à $\alpha(x)$ et $\beta(x)$) montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \Omega\,,\ |\gamma(x, v_n(x)) - \gamma(x, v(x))| \leq |v_n(x) - v(x)|\,.$
En outre, $f(x, .) : [\alpha(x), \beta(x)] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ y \longmapsto f(x, y)$ est continue pour p.p. $x \in \Omega$. Il en résulte que $\forall$ p.p $x \in \Omega\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \psi(v_n)(x) = \psi(v)(x)\,.$
Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall$ p.p. $x \in \Omega\,,\ |\psi(v_n)(x)| \leq h(x)\,.$
Par application du Théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous déduisons que $\psi(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(v)$ dans $L^p(\Omega)$.

• *Justifions le fait que T_2 soit complètement continu.*
Soit D une partie bornée de $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$. Puisque f est L^p-Carathéodory, $\psi(D)$ est borné dans $L^p(\Omega)$ et d'après (1.3), $T_2(D)$ est bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$. L'injection compacte de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ fait que $\overline{T_2(D)}$ est un compact de $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$.

• *L'hypothèse de stabilité d'une boule par T_2.*
D'après (1.3) et (2.2), $\exists R > 0$ tel que $T_2(\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})) \subset B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)$. Par exemple, $R = C'\|h\|_{L^p(\Omega)}$, où C' et h sont respectivement la constante qui apparait dans (1.3) et la fonction qui apparait dans (2.2), convient.
Nous avons donc, a fortiori, $T_2(B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)) \subset B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)$.
Les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder sont toutes remplies. Donc (2.3) admet un point fixe, ce qui revient à dire que (2.1) admet une solution.

•• *Deuxième étape :* Toute solution u de (2.1) vérifie $\alpha \leq u \leq \beta$.
Montrons que $\alpha \leq u$. Si tel n'était pas le cas, nous aurions $\max\limits_{\Omega}(\alpha - u) = M > 0$.
Nous avons sur le bord $\partial\Omega$, $\alpha \leq u$. Donc $\exists x_0 \in \Omega$ tel que $\alpha(x_0) - u(x_0) = M$ et, par continuité de $\alpha - u\,,\ \exists x_1 \in \Omega$ tel que $\alpha(x_1) - u(x_1) < M$.
On en déduit que : $\exists \Omega_1 \subset \Omega$ tel que $\forall x \in \Omega_1\,,\ \alpha(x) - u(x) > 0$ et que $\alpha - u$ est non constante sur Ω_1. Il en résulte que :

$$\forall x \in \Omega_1\,,\ -\Delta(\alpha - u)(x) \leq f(x, \alpha(x)) - f(x, \gamma(x, u(x))) = f(x, \alpha(x)) - f(x, \alpha(x)) = 0\,.$$

Ce qui contredit le principe du maximum (cf. Rappel 1.3).
$u \leq \beta$ se démontre de manière analogue.

•• *Conclusion :* De $\alpha \leq u \leq \beta$, il en résulte que $\forall x \in \Omega\,,\ \gamma(x, u(x)) = u(x)$ et que, finalement, si u est une solution de (2.1) alors elle est une solution de (1.1) et elle vérifie la localisation annoncée. ■

Remarque 2.1 : Considérons le problème aux limites unidimensionnel :

$$\begin{cases} -u'' = \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 & \text{sur }]0,\pi[\,, \\ u(0) = u(\pi) = 0\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Il est clair que la fonction constante $\beta = 1$ est une sur-solution de ce problème.

Par ailleurs, des calculs simples montrent que si on choisit le réel strictement positif c suffisamment petit, la fonction $\alpha : x \longmapsto c\,x^{\frac{3}{2}}(\pi - x)^{\frac{3}{2}}$ est une sous-solution de (2.4). Et si on choisit c suffisamment petit, on a $\alpha \leq \beta$.

La fonction $f_1 :]0,\pi[\times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x,u) \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}} - 1$ ne vérifie pas les conditions de la Définition 1.1, puisqu'elle n'est même pas définie pour $u \leq 0$.

En revanche, si l'on pose $E = \{(x,y) \in]0,\pi[\times \mathbb{R} \ \mid \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, la fonction $f_2 : E \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,u) \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}} - 1$ est L^p-Carathéodory.

En effet, f_2 vérifie à l'évidence les axiomes (i) et (ii) de la Définition 1.2 ; la vérification de l'axiome (ii) par f_2 résultant de l'inégalité $\forall (x,u) \in E\,,\ 0 < \alpha(x) \leq u$. Quant à l'axiome (iii) de la Définition 1.2, il est vérifié par f_2 grâce à la majoration

$$\forall (x,y) \in E\,,\ |f_2(x,u)| \leq h(x) = \frac{1}{\sqrt{c}\,x^{\frac{3}{4}}(\pi - x)^{\frac{3}{4}}} + 1$$

et au fait que la fonction h définie dans cette majoration appartient à $L^p(0,\pi)$ pour tout $p \in]1, \dfrac{4}{3}[$.

Toutes les conditions sont donc réunies pour que l'on puisse appliquer le Théorème 2.1.

Cet exemple montre toute la pertinence de la Définition 1.2 et ce qu'elle apporte de plus que la Définition 1.1 dans la théorie des sous-solutions et sur-solutions. Il montre, en effet, l'intérêt de supposer que la fonction f, qui est au second membre du problème (1.1), est L^p-Carathéodory en tant que fonction de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire au sens de la Définition 1.2 avec a une sous-solution de (1.1) et b une sur-solution du problème (1.1)) plutôt qu'en tant que fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire au sens de la Définition 1.1).

Le théorème suivant, qui sera admis, généralise le Théorème 2.1. Nous serons amenés à l'appliquer souvent.

Théorème 2.2 : On désigne par q et r deux entiers naturels non nuls.

Soient $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_q$, des sous-solutions de (1.1) et $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_r$, des sur-solutions de (1.1).

Notons $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ et $\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$.

Si $\alpha \leq \beta$, et si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est L^p-Carathéodory avec $E = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} \ \mid \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ et $p > n$, alors (1.1) admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Remarque 2.2 : Notons que la fonction α (resp. β), définie dans le Théorème 2.2, n'est pas nécessairement une sous-solution (resp. une sur-solution) de (1.1), au sens de la Définition 1.3, parce qu'il peut lui manquer la régularité qui y est requise. Remarquons cependant que α et β sont continues.

On pourrait adopter une définition plus large des notions de sous-solution et sur-solution, qui généraliserait la Définition 1.3 et qui ferait de α et β, telles qu'elles sont définies dans le Théorème 2.2, respectivement, une sous-solution et une sur-solution du problème (1.1).

Exemple 2.1 : Etant donné un paramètre réel $\epsilon > 0$, on considère le problème aux limites unidimensionnel

$$\begin{cases} -\epsilon^2 u''(x) = \varphi(|x|) - \varphi(u(x)) & \text{si } x \in]-1,1[\,, \\ u(-1) = u(1) = 1\,, \end{cases} \tag{2.5}$$

où $\varphi \in \mathcal{C}^1(I\!R)$ et vérifie, pour tout $x \in [-1,1]\,,\ \varphi'(x) \geq a^2 > 0$, avec a un réel > 0.

• *Première idée :* Il est facile de vérifier que les fonctions α et β constantes, définies par $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, sont respectivement sous-solution et sur-solution de (2.5). En effet,

$-\epsilon^2\alpha''(x) = 0 \leq \varphi(|x|) - \varphi(0)\ ,\ \ \alpha(-1) \leq 1\ ,\ \ \alpha(1) \leq 1.$

$-\epsilon^2\beta''(x) = 0 \geq \varphi(|x|) - \varphi(1)\ ,\ \ \beta(-1) \geq 1\ ,\ \ \beta(1) \geq 1.$

Comme $\alpha \leq \beta$, nous déduisons par le Théorème 2.1 l'existence d'une solution $u_\epsilon \in [\alpha, \beta]$. Mais cet encadrement par deux constantes ne nous renseigne pas sur le comportement de la solution u_ϵ lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$.

• *Deuxième idée :* Posons $\alpha(x) = |x|$ et $\beta_\epsilon(x) = |x| + \dfrac{\epsilon}{a}\, e^{-\frac{a}{\epsilon}|x|}$, pour tout $x \in [-1,1]$.

Chacune des fonctions définies sur [-1,1] par $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -x$ est une sous-solution de (2.5). Et, pour tout $x \in [-1,1]$, on a $|x| = \max(x,-x)$.

D'autre part, on vérifie aisément que β_ϵ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur [-1,1].

Montrons que β_ϵ est une sur-solution de (2.5). Nous avons

$$-\epsilon^2\beta_\epsilon''(x) = \begin{cases} -\epsilon a\, e^{-\frac{a}{\epsilon}x} & \text{si } x \in [0,1]\,, \\ -\epsilon a\, e^{\frac{a}{\epsilon}x} & \text{si } x \in [-1,0]\,, \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \varphi(|x|) - \varphi(\beta_\epsilon(x)) = \begin{cases} \varphi(x) - \varphi(x + \frac{\epsilon}{a}\, e^{-\frac{a}{\epsilon}x}) & \text{si } x \in [0,1]\,, \\ \varphi(-x) - \varphi(-x + \frac{\epsilon}{a}\, e^{\frac{a}{\epsilon}x}) & \text{si } x \in [-1,0]\,. \end{cases}$$

Soit $x \in [0,1]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c compris entre x et $x + \dfrac{\epsilon}{a}\, e^{-\frac{a}{\epsilon}x}$ tel que $\varphi(x) - \varphi(x + \dfrac{\epsilon}{a}\, e^{-\frac{a}{\epsilon}x}) = -\dfrac{\epsilon}{a}\, e^{-\frac{a}{\epsilon}x}\,\varphi'(c)$. Compte tenu de la condition $\forall x \in I\!R,\ \varphi'(x) \geq a^2$, nous avons, pour tout $x \in [0,1]$, $-\dfrac{\epsilon}{a}\, e^{-\frac{a}{\epsilon}x}\,\varphi'(c) \leq -\epsilon a\, e^{-\frac{a}{\epsilon}x} = -\epsilon^2\beta_\epsilon''(x)$.

De manière analogue, on montre que, pour tout $x \in [-1,0]$, $\varphi(-x) - \varphi(-x + \dfrac{\epsilon}{a}\, e^{\frac{a}{\epsilon}x}) \leq -\epsilon^2\beta_\epsilon''(x)$.

Comme $\alpha \leq \beta_\epsilon$, pour tout réel $\epsilon > 0$, nous pouvons appliquer le Théorème 2.2 qui nous permet d'affirmer que : Il existe u_ϵ solution de (2.5) telle que $u_\epsilon \in [\alpha, \beta_\epsilon]$ et vérifie donc

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ |\, u_\epsilon(x) - |x|\, | \leq \frac{\epsilon}{a}\, e^{-\frac{a}{\epsilon}|x|}\,.$$

Nous pouvons en déduire que la famille de solutions $\{u_\epsilon\,,\ \epsilon \in I\!\!R_+^*\}$ converge uniformément vers la fonction $x \longmapsto |x|$ lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$.

Remarque 2.3 : Nous pouvons donner une interprétation "intuitive" du Théorème 2.2.
Notons I l'opérateur $I : \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\,,\ u \longmapsto u$.
Si α est sous-solution de (1.1) et que nous posons $\widetilde{\alpha} = T_1(\alpha)$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta\widetilde{\alpha}(x) = f(x,\alpha(x)) \geq -\Delta\alpha(x) & \text{dans } \Omega\,, \\ \widetilde{\alpha}(x) = 0 \geq \alpha(x) & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{array}\right.$$

ce qui se ramène à

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta(\widetilde{\alpha} - \alpha) \geq 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ \widetilde{\alpha} - \alpha \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{array}\right.$$

D'après le principe du maximum, $(\widetilde{\alpha} - \alpha) \geq 0$, ce qui signifie que : $(I - T_1)(\alpha) \leq 0$.
De même, si β est une sur-solution de (1.1), elle vérifie : $(I - T_1)(\beta) \geq 0$.
Nous obtenons d'après le Théorème 2.1, l'existence d'une fonction $u \in [\alpha, \beta]$ telle que $(I - T_1)(u) = 0$.
Le Théorème 2.1 apparait donc comme une sorte de *théorème des valeurs intermédiaires* relatif à l'opérateur $I - T_1$.

Remarque 2.4 : On pourrait se poser la question de savoir si on peut se passer de la condition $\alpha \leq \beta$ dans le Théorème 2.1 pour assurer l'existence d'une solution de (1.1). Et la réponse est : non.
En effet, si $\alpha \not\leq \beta$, le problème (1.1) peut ne pas admettre de solution, comme le montre l'exemple suivant.

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda_k u + \varphi_k & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{array}\right. \tag{2.6}$$

où λ_k est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$, autre que la première, et φ_k une fonction propre qui lui est associée.
Le problème (2.6) n'a pas de solution, car s'il admettait une solution u, elle vérifierait d'après la formule de Green-Riemann : $\displaystyle\int_\Omega -\Delta u\, \varphi_k = \int_\Omega -\Delta\varphi_k\, u = \int_\Omega \lambda_k \varphi_k\, u\,.$
Et si l'on intègre sur Ω la première égalité du problème (2.6), après l'avoir multipliée par φ_k, on obtient : $\displaystyle\int_\Omega \varphi_k^2 = 0$. Or cette intégrale n'est pas nulle.
Donc le problème (2.6) n'a pas de solution.
Si on prend $\alpha = K\varphi_1$, avec K une constante réelle positive suffisamment grande, on a $\alpha(x) = 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$-\Delta\alpha = \lambda_1\alpha = \lambda_k\alpha + (\lambda_1 - \lambda_k)K\varphi_1 \leq \lambda_k\alpha + \varphi_k\,,$$

parce que $\lambda_1 - \lambda_k < 0$ et que $\varphi_1 >> 0$.

Si on prend $\beta = -K'\varphi_1$, avec K' une constante réelle positive suffisamment grande, on obtient de manière similaire $\beta(x) = 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$-\Delta\beta \geq \lambda_k\beta + \varphi_k \,.$$

α et β sont donc, respectivement, une sous-solution et une sur-solution de (2.6). Mais $\alpha > \beta$!

Le théorème suivant fournit un raffinement de la localisation des solutions de (1.1), situées entre une sous-solution et sur-solution données, par rapport au Théorème 2.1.

<u>Théorème 2.3 :</u> Soient α et β respectivement une sous-solution et une sur-solution du problème (1.1), telles que $\alpha \leq \beta$ et supposons que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ soit L^p-Carathéodory avec $p > n$ et $E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$.

Si le problème (1.1) admet au moins deux solutions situées entre α et β, alors :

i) $\exists u_{\min}, u_{\max}$ solutions de (1.1) telles que $\alpha \leq u_{\min} \leq u_{\max} \leq \beta$,

ii) si u est une solution de (1.1) qui vérifie $\alpha \leq u \leq \beta$, alors $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$.

Dans ce cas, $u_{\min}$ (resp. $u_{\max}$) est appelée **la solution minimale** (resp. **la solution maximale**) **du problème (1.1) par rapport à la paire de sous-solution et sur-solution** (α, β).

<u>Preuve :</u> Notons I l'opérateur $I : \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, $u \longmapsto u$.

•• *Première étape :* Notons $U = \{u \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \mid \alpha \leq u \leq \beta \text{ et } u = T_1(u)\}$.

D'après le Théorème 2.1, U est non vide. Montrons que U est un compact dans $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$.

Nous pouvons aussi écrire $U = \{u \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \mid u = T_2(u)\}$, où T_2 est l'opérateur défini dans la preuve du Théorème 2.1, et nous avons donc $U = T_2(U)$.

Or, d'après ce que nous avons établi précédemment pour T_2, nous avons $T_2(U) \subset B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)$.

Par conséquent, U est un borné de $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$. A ce titre, et comme T_2 est complètement continu, $T_2(U) = U$ est un compact de $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$.

•• *Deuxième étape :* Etant donnée une solution u de (1.1) qui vérifie $\alpha \leq u \leq \beta$, posons

$$F_u = \{v \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \mid \alpha \leq v \leq u \text{ et } v = T_1(v)\}.$$

F_u est non vide, fermé (il est même compact par la première étape) et inclus dans U.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et soient u_1, u_2, . . . u_q, des solutions de (1.1) qui vérifient $\alpha \leq u_i \leq \beta$, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$. Nous avons $\bigcap\limits_{1 \leq i \leq q} F_{u_i} \neq \emptyset$.

En effet, il suffit de considérer la fonction $\beta = \min(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ et d'appliquer le Théorème 2.2, pour mettre en évidence l'existence d'une solution u de (1.1) qui vérifie $\alpha \leq u \leq u_i$, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$.

D'après la propriétés d'intersections finies des compacts, il en résulte que : $\bigcap_{u\in U} F_u \neq \emptyset$.

En posant $G_u = \{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \ \mid \ u \le v \le \beta \ \text{ et } \ v = T_1(v)\}$ et en procédant de la même façon, on montre que : $\bigcap_{u\in U} G_u \neq \emptyset$.

•• *Troisième étape :* Soient $\widehat{u} \in \bigcap_{u\in U} F_u$ et $\tilde{u} \in \bigcap_{u\in U} G_u$. Nous avons $\widehat{u} \in U$ et, pour tout $u \in U$, nous avons $\widehat{u} \le u \le \tilde{u}$. Ce qui montre que $\bigcap_{u\in U} F_u$ se réduit au singleton $\{\widehat{u}\}$ et que $\bigcap_{u\in U} G_u$ se réduit au singleton $\{\tilde{u}\}$. Il suffit alors de poser $u_{\min} = \widehat{u}$ et $u_{\max} = \tilde{u}$.

•• *Conclusion :* Par définitions de $u_{\min}$ et de $u_{\max}$, nous avons, à l'évidence, que toute solution u de (1.1), comprise entre α et β, vérifie $\alpha \le u_{\min} \le u \le u_{\max} \le \beta$. ■

Exemple 2.2 : Considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_2 \max\{-u-2\,,\ \min\{u, -u+2\}\} =: f(u) & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{2.7}$$

où λ_2 est la deuxième valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$.

Notons φ_2 une fonction propre associée à la valeur propre λ_2 telle que $\|\varphi_2\|_\infty = 1$.

Les fonctions de la forme $x \longmapsto u(x) = \mu\varphi_2(x)$, avec μ constante réelle, telle que $|\mu| \le 1$, sont solutions de (2.7).

Les fonctions α et β définies pas $\alpha(x) = -2$ et $\beta(x) = 2$ sont respectivement sous-solution et sur-solution de (2.7).

Par le Théorème 2.3, $\exists u_{\max}$, $\exists u_{\min}$ solutions de (2.7) vérifiant $-2 \le u_{\min} \le 0 \le u_{\max} \le 2$.

Mais nous pouvons être plus précis quant aux inégalités $u_{\min} \le 0 \le u_{\max}$. En effet, si nous donnons à μ successivement les valeurs 1 et -1 par exemple, nous pouvons déduire que l'on a nécessairement : $u_{\min} \le -\mid \varphi_2 \mid \le \mid \varphi_2 \mid \le u_{\max}$. Par régularité de $u_{\min}$ et $u_{\max}$ nous avons donc : $u_{\min} << 0 << u_{\max}$.

Remarque 2.5 : Dans le cas unidimensionnel, nous pouvons généraliser le Théorème 2.1 de la façon suivante.

Considérons le problème aux limites :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)) & \text{dans }]0, \pi[\,, \\ u(0) = u(\pi) = 0\,. \end{cases}$$

Notons d'abord $\mathcal{A} = \{h \in L^1_{loc}(0, \pi) \ \mid \ s \longmapsto s\,(\pi - s)\,h(s) \in L^1(0, \pi)\}$ et remarquons que $L^1(0, \pi) \subset \mathcal{A}$. Notons ensuite $W^{2,\mathcal{A}}(0, \pi) = \{u \in W^{1,1}\,(0, \pi) \ \mid \ u'' \in \mathcal{A}\}$ et remarquons que $W^{2,\mathcal{A}}(0, \pi) \subset \mathcal{C}([0, \pi]) \bigcap \mathcal{C}^1(]0, \pi[)$. L'inclusion dans le premier espace est une injection continue. Quant à l'inclusion dans le second espace, elle se justifie comme suit.

Soit $u \in W^{2,\mathcal{A}}(0,\pi)$. Posons, pour tout $s \in]0,\pi[$, $v(s) = s\,(\pi - s)\,u''(s)$. Nous avons par hypothèse : $v \in L^1(0,\pi)$.

Etant donné deux réels c et d tels que $0 < c < d < \pi$, nous avons

$\forall$ p.p $s \in]c,d[$, $| u''(s) | = \dfrac{| v(s) |}{s(\pi - s)}$. Ce qui entraîne que $u'' \in L^1(]c,d[)$.

Donc $u' \in \mathcal{C}([c,d])$ et, en définitive, $u \in \mathcal{C}^1(]0,\pi[)$.

Si $h \in \mathcal{A}$, on peut montrer que : $\exists!\, u \in W^{2,\mathcal{A}}(0,\pi)$ qui vérifie

$$\begin{cases} -u''(x) = h(x) & \text{sur }]0,\pi[\,, \\ u(0) = u(\pi) = 0\,. \end{cases}$$

Des calculs élémentaires montrent que cette solution est donnée par :

$$u(x) = \frac{(\pi - x)}{\pi} \int_0^x h(s)\, s\, ds \, + \frac{x}{\pi} \int_x^\pi h(s)\,(\pi - s)\, ds\,.$$

Dans le cas de la dimension 1, C. De Coster, M.R. Grossinho et P. Habets [1] (voir aussi [2]) ont élargi la cadre de la théorie que nous exposons à une fonction f qui est seulement

$\mathcal{A}$-Carathéodory ; notion qu'on définit par les mêmes axiomes que ceux de la Définition 1.2, à ceci près que dans l'axiome (iii) on remplace $h \in L^1(I)$ par $h \in \mathcal{A}$.

Dans cette généralisation, ils ont donné, pour la dimension 1, un théorème d'existence et de localisation analogue au Théorème 2.1, mais où la solution u appartiennent à $W^{2,\mathcal{A}}(0,\pi)$.

L'exemple qui va suivre relève de cette généralisation.

<u>Exemple 2.3 :</u> Considérons le problème aux limites unidimensionnel :

$$\begin{cases} u'' + \frac{3}{x(\pi - x)}(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} + u) = 0 & \text{sur }]0,\pi[\,, \\ u(0) = u(\pi) = 0\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Il est clair que la fonction constante $\beta = 1$ est une sur-solution de ce problème.

Par ailleurs, des calculs simples montrent que si on choisit le réel strictement positif d suffisamment petit, la fonction $\alpha : x \longmapsto dx^{\frac{1}{3}}(\pi - x)^{\frac{1}{3}}$ est une sous-solution de (2.8). Et si on choisit d suffisamment petit, on a $\alpha \leq \beta$.

De plus, $\forall$ p.p. $x \in [0,\pi]$ et $\forall u \in [\alpha,\beta]$, on a :

$$\left| \frac{3}{x(\pi - x)}(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} + u) \right| \leq \frac{3}{x(\pi - x)} \left(\frac{1}{d^2 x^{\frac{2}{3}} (\pi - x)^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{d x^{\frac{1}{3}} (\pi - x)^{\frac{1}{3}}} + 1 \right) =: \varphi(x)$$

et $\varphi \in \mathcal{A}$. D'après la généralisation ci-dessus, il existe une solution u de (2.8) située entre α et β et qui appartient à $W^{2,\mathcal{A}}(0,\pi)$.

Notations 3.1 : On suppose connues une sous-solution α et une sur-solution β de (1.1), telles que $\alpha << \beta$.

Notons Θ l'ouvert de $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$ défini par

$$\Theta = \{v \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \;\mid\; \alpha << v << \beta \text{ et } \|v\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < R\}\,, \tag{3.1}$$

où la constante R est celle qui a été définie, en association avec α et β, dans la preuve du Théorème 2.1.

Nous savons que l'opérateur complètement continu $T_1 : \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, qui a été défini dans le chapitre 1, admet un point fixe u et nous voulons montrer que $u \in \Theta$, sous une hypothèse que nous préciserons.

Commençons par énoncer un certain nombre de propriétés de la notion de **degré de Leray-Schauder** [3].

Proposition 3.1 : On se place dans un espace vectoriel normé X.

On désigne par I l'opérateur Identité de X.

Un **degré** est une application qui à tout ouvert borné Θ de X et à tout opérateur $\mathcal{T} : \Theta \longrightarrow X$, complètement continu et tel que $\forall u \in \partial\Theta\,,\ \mathcal{T}u \neq u$, associe le nombre entier relatif $\deg(I - \mathcal{T}, \Theta)$ qui a les propriétés suivantes :

(P1) **Normalisation** : $\deg(I, \Theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0_X \in \Theta\,, \\ 0 & \text{si } 0_X \notin \Theta\,. \end{cases}$

(P2) **Additivité** : Si Θ_1 et Θ_2 sont deux ouverts bornés disjoints de X tels que $\forall u \in \partial\Theta_1 \bigcup \partial\Theta_2$, $u \neq \mathcal{T}u$, alors $\deg(I - \mathcal{T}, \Theta_1 \bigcup \Theta_2) = \deg(I - \mathcal{T}, \Theta_1) + \deg(I - \mathcal{T}, \Theta_2)$.

(P3) **Invariance par rapport à une homotopie** : Si $H : [0,1] \times \overline{\Theta} \longrightarrow X$ est complètement continu et tel que $0_X \notin (I - H)([0,1] \times \partial\Theta)$, alors, pour tout $t \in [0,1]$

$$\deg(I - H(0,.), \Theta) = \deg(I - H(t,.), \Theta)\,.$$

(P4) Si $0_X \notin (I - \mathcal{T})(\overline{\Theta})$, alors $\deg(I - \mathcal{T}, \Theta) = 0$.

(P5) Si $\deg(I - \mathcal{T}, \Theta) \neq 0$, alors $\exists u \in \Theta$ telle que $u = \mathcal{T}u$.

(P6) **Excision** : Si une partie A de Θ est telle que $0_X \notin (I - \mathcal{T})(\overline{A})$ alors

$$\deg(I - \mathcal{T}, \Theta) = \deg(I - \mathcal{T}, \Theta \setminus \overline{A})\,.$$

Définition 3.1 :

Une sous-solution α de (1.1) est dite **stricte**, si pour toute solution u de (1.1), on a :

$$u \geq \alpha \Longrightarrow u >> \alpha\,.$$

Une sur-solution β de (1.1) est dite **stricte**, si pour toute solution u de (1.1), on a :

$$u \leq \beta \Longrightarrow u << \beta \,.$$

Remarque 3.1 : Une sous-solution (resp. une sur-solution) stricte de (1.1) est une sous-solution (resp. sur-solution) propre de (1.1).

Théorème 3.2 : On suppose qu'il existe une sous-solution stricte α de (1.1) et une sur-solution stricte β de (1.1) telles que $\alpha \leq \beta$.
Si $f : E \longrightarrow I\!R$ est L^p-Carathéodory avec $E = \{(x,y) \in \Omega \times I\!R \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ et $p > n$, alors il n'y a pas de solution de (1.1) sur $\partial\Theta$, où Θ est défini par (3.1). De ce fait, $\deg(I - T_1, \Theta)$ est bien défini. De plus $\deg(I - T_1, \Theta) = 1$.
Enfin, si u est un point fixe de l'opérateur T_1 tel que $\alpha \leq u \leq \beta$, alors $\alpha << u << \beta$.

Remarque 3.2 : Il est facile de voir que sous l'hypothèse d'existence d'une sous-solution stricte α de (1.1) et d'une sur-solution stricte β de (1.1), la propriété $\alpha \leq \beta$ équivaut à la propriété $\alpha << \beta$. En effet, d'après le Théorème 2.1, si $\alpha \leq \beta$, il existe une solution u de (1.1) telle que $\alpha \leq u \leq \beta$ et, comme α et β sont strictes, nous avons $\alpha << u << \beta$.
Par conséquent, sous les hypoyhèses du Théorème 3.2, Θ est bien défini et est bien un ouvert de $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$.

Preuve du Théorème 3.2 : La première affirmation et la dernière affirmation du Théorème 3.2 sont évidentes. Il reste à montrer l'égalité $\deg(I - T_1, \Theta) = 1$.
Rappelons que l'opérateur $T_2 : \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, qui a été défini dans la preuve du Théorème 2.1, vérifie les trois propriétés suivantes :
(P7) $\forall u \in \Theta\,,\ T_2(u) = T_1(u)$.
(P8) $T_2(\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})) \subset B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)$.
(P9) Si $u = T_2(u)$, alors $\alpha \leq u \leq \beta$ et, comme α et β sont strictes, $u \in \Theta$.
Considérons maintenant $v \in \partial B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)$.
D'après (P8), nous avons $\forall \lambda \in [0,1]\,,\ \lambda T_2(v) \in B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)$ et, par suite, $\forall \lambda \in [0,1]\,,$ $v \neq \lambda T_2(v)$. Ce qui montre que l'opérateur $H(t,.) = t\,T_2(.)$ vérifie toutes les conditions qui permettent de lui appliquer la propriété d'invariance par rapport à une homotopie (Proposition 3.1, (P3)).
Appliquons donc (P3) avec $\Theta = B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)$, $H(t,.) = tT_2(.)$ et $t = 1$. Il vient

$$\deg(I, B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)) = \deg(I - T_2, B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R))\,.$$

D'autre part, on a par (P1) : $\deg(I, B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)) = 1$.

Appliquons (P6) à $A = B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R) \setminus \Theta$, sachant que par (P9) nous avons $0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})} \notin (I - T_2)(\overline{A})$. Nous obtenons

$$\deg(I - T_2, B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)) = \deg(I - T_2, \Theta)\,.$$

Enfin, par (P7), on a $\deg(I - T_2, \Theta) = \deg(I - T_1, \Theta)$.

En associant toutes les égalités que nous venons de mettre en évidence, nous avons :

$$\deg(I - T_1, \Theta) \;=\; \deg(I - T_2, \Theta) \;=\; \deg(I - T_2, B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)) \;=\; \deg(I, B(0_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})}, R)) \;=\; 1. \quad \blacksquare$$

<u>Remarque 3.3 :</u> S'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, qui contient Θ et tel que $\deg(I - T_1, \mathcal{U}) = 0$, alors $0 = \deg(I - T_1, \mathcal{U} \setminus \overline{\Theta}) + \deg(I - T_1, \Theta)$, d'après l'additivité du degré.

Il existe donc une solution de (1.1) dans $\mathcal{U} \setminus \Theta$. Ce qui est un moyen d'obtenir un résultat de multiplicité.

Un autre résultat de multiplicité est le théorème suivant, qui est connu sous le nom du **Théorème des trois solutions d'Amann**.

<u>Théorème 3.3 :</u> Supposons que nous ayons deux sous-solutions strictes α_1 et α_2 de (1.1) et deux sur-solutions strictes β_1 et β_2 de (1.1) qui vérifient : $\alpha_1 << \beta_1$, $\alpha_2 << \beta_2$, $\alpha_2 \not\leq \beta_1$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq \beta_2$.

Si $f : E \longrightarrow I\!R$ est L^p-Carathéodory avec $E = \{(x, y) \in \Omega \times I\!R \;\mid\; \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ et $p > n$, alors (1.1) admet au moins trois solutions u_1, u_2 et u_3 qui vérifient

$$\alpha_1 << u_1 << \beta_1\,,\; \alpha_2 << u_2 << \beta_2 \text{ et } \alpha_1 << u_3 << \beta_2\,,\; \text{ avec } u_3 \not\leq \beta_1 \text{ et } u_3 \not\geq \alpha_2\,.$$

<u>Preuve :</u> Pour $(i, j) \in \{(1, 1)\,;\, (1, 2)\,;\, (2, 2)\}$, notons

$$\theta_{ij} = \{v \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \;\mid\; \alpha_i << v << \beta_j \text{ et } \|v\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < R\}\,,$$

où R est la constante qui a été associée à la paire α_1, β_2 dans la preuve du Théorème 2.1.

Par le Théorème 3.2 on a : $\deg(I - T_1, \theta_{11}) = 1$ et $\deg(I - T_1, \theta_{22}) = 1$. Ce qui nous fournit l'existence de deux solutions u_1 et u_2 de (1.1) qui vérifient $\alpha_1 << u_1 << \beta_1$ et $\alpha_2 << u_2 << \beta_2$.

D'autre part, par le Théorème 3.2 combiné avec la propriété d'excision du degré, nous avons :

$1 = \deg(I - T_1, \theta_{12}) = \deg(I - T_1, \theta_{11}) + \deg(I - T_1, \theta_{22}) + \deg(I - T_1, \theta_{12} \setminus (\overline{\theta_{11}} \bigcup \overline{\theta_{22}}))$

$= 1 + 1 + \deg(I - T_1, \theta_{12} \setminus (\overline{\theta_{11}} \bigcup \overline{\theta_{22}}))$.

On en déduit que $\deg(I - T_1, \theta_{12} \setminus (\overline{\theta_{11}} \bigcup \overline{\theta_{22}})) = -1$. Ce qui signifie qu'il existe une troisième solution u_3 de (1.1) située entre α_1 et β_2 qui vérifie $u_3 \not\leq \beta_1$ et $u_3 \not\geq \alpha_2$. $\blacksquare$

Remarque 3.4 : Dans le Théorème 3.3, les hypothèses $\alpha_1 << \beta_1$ et $\alpha_2 << \beta_2$ peuvent être remplacées respectivement par $\alpha_1 \leq \beta_1$ et $\alpha_2 \leq \beta_2$, par la remarque 3.2 .

Corollaire 3.4 : Nous reprenons exactement les mêmes hypothèses que dans le Théorème 3.3. Alors (1.1) admet au moins trois solutions u_1, u_2 et u_3 qui vérifient

$$\alpha_1 << u_1 << \beta_1\,,\ \alpha_2 << u_2 << \beta_2 \text{ et } u_1 \lneqq u_3 \lneqq u_2\,,\ \text{ avec } u_3 \not\leq \beta_1 \text{ et } u_3 \not\geq \alpha_2\,.$$

Remarque 3.5 : Il n'y a que la double inégalité $u_1 \lneqq u_3 \lneqq u_2$ qui soit nouvelle par rapport à la conclusion du Théorème 3.3. Elle constitue d'ailleurs un raffinement par rapport à la double inégalité $\alpha_1 << u_3 << \beta_2$ du Théorème 3.3, dans la mesure où l'on a, par ailleurs, $\alpha_1 << u_1$ et $u_2 << \beta_2$.

Preuve du Corollaire 3.4 : Montrons l'existence de trois solutions u_1, u_2 et u_3 de (1.1) qui vérifient $u_1 \lneqq u_3 \lneqq u_2$, en plus des autres conditions figurant dans la conclusion du Théorème d'Amann.
L'application du Théorème 2.3 permet de dire qu'il existe $u_{\min}$ (resp. $u_{\max}$) solution minimale (resp. solution maximale) de (1.1) par rapport à la paire de sous-solution et sur-solution $(\alpha_1\,,\,\beta_2)$. Le Théorème 3.3 indique que $\alpha_1 << u_{\min} << \beta_1$, $\alpha_2 << u_{\max} << \beta_2$. Et nous avons évidemment $u_{\min} \leq u_3 \leq u_{\max}$, où u_3 est la troisième solution donnée par le Théorème 3.3.
Il suffit donc de poser $u_1 = u_{\min}$ et $u_2 = u_{\max}$ pour avoir le résultat annoncé. ■

Théorème 3.5 : Nous avons le même résultat que dans le Théorème d'Amann, à condition de remplacer les inégalités strictes concernant α_1 et β_2, par des inégalités larges, sans exiger de la sous-solution α_1 de (1.1) et de la sur-solution β_2 de (1.1) d'être strictes.
Preuve : Considérons le problème modifié

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \overline{f}(x, u(x)) & \text{dans } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $\overline{f}$ définie par :

$$\forall \text{ p.p. } x \in \Omega\,,\ \forall z \in I\!R\,,\ \overline{f}(x,z) = \begin{cases} f(x, \alpha_1(x)) & \text{si } z < \alpha_1(x)\,, \\ f(x,z) & \text{si } \alpha_1(x) \leq z \leq \beta_2(x)\,, \\ f(x, \beta_2(x)) & \text{si } z > \beta_2(x)\,. \end{cases}$$

Notons $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1 - 1$ et $\overline{\beta}_2 = \beta_2 + 1$. Nous avons :
$\forall x \in \Omega,\ -\Delta\overline{\alpha}_1(x) = -\Delta\alpha_1(x) \leq f(x, \alpha_1(x)) = \overline{f}(x, \overline{\alpha}_1(x))$ et $\forall x \in \partial\Omega\,,\ \overline{\alpha}_1(x) < \alpha_1(x) \leq 0.$

De même, $\forall x \in \Omega,\ -\Delta\overline{\beta}_2(x) = -\Delta\beta_2(x) \geq f(x,\beta_2(x)) = \overline{f}(x,\overline{\beta}_2(x))$
et $\forall x \in \partial\Omega\,,\ \overline{\beta}_2(x) > \beta_2(x) \geq 0\,.$
Les fonctions $\overline{\alpha}_1$ et $\overline{\beta}_2$ sont donc respectivement une sous-solution et une sur-solution du problème (3.2) et elles vérifient $\overline{\alpha}_1 << \overline{\beta}_2\,.$
D'autre part, si u est une solution de (3.2), elle vérifie $\alpha_1 \leq u \leq \beta_2$ (voir démonstration du Théorème 2.1) et on a donc $\overline{\alpha}_1 << u << \overline{\beta}_2$. Nous en déduisons que $\overline{\alpha}_1$ et $\overline{\beta}_2$ sont, respectivement, une sous-solution stricte et une sur-solution stricte du problème (3.2).
En outre, le fait que $\alpha_2 \in [\alpha_1,\beta_2]$, conduit à : $\forall x \in \Omega\,,\ f(x,\alpha_2(x)) = \overline{f}(x,\alpha_2(x))$.
Nous en déduisons que α_2 est une sous-solution de (3.2) et elle est stricte, puisque toute solution de (3.2) est une solution de (1.1). De la même façon, β_1 est une sur-solution stricte de (3.2).
Enfin, nous avons : $\overline{\alpha}_1 << \beta_1,\ \alpha_2 << \overline{\beta}_2,\ \alpha_2 \not\leq \beta_1,\ \overline{\alpha}_1 \leq \alpha_2$ et $\beta_1 \leq \overline{\beta}_2\,.$
Le Théorème d'Amann nous permet de dire qu'il existe trois solutions u_1, u_2 et u_3 de (3.2), telles que $\overline{\alpha}_1 << u_1 << \beta_1$, $\alpha_2 << u_2 << \overline{\beta}_2$ et $\overline{\alpha}_1 << u_3 << \overline{\beta}_2$, avec $u_3 \not\leq \beta_1$ et $u_3 \not\geq \alpha_2\,.$
Mais, comme nous avons par construction, $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\alpha_1 \leq u_i \leq \beta_2$, nous en déduisons que u_1, u_2 et u_3 vérifient : $\alpha_1 \leq u_1 << \beta_1$, $\alpha_2 << u_2 \leq \beta_2$, $\alpha_1 \leq u_3 \leq \beta_2$, $u_3 \not\leq \beta_1$ et $u_3 \not\geq \alpha_2\,.$ ■

Remarque 3.6 : Si une sous-solution propre α de (1.1) vérifie

$$\exists\epsilon > 0 \text{ tel que } \forall\,\text{p.p.}\, x \in \Omega\,,\ \forall z \in [\alpha(x),\alpha(x)+\epsilon]\,,\ \begin{cases} -\Delta\alpha(x) \leq f(x,z) & \text{sur } \Omega\,, \\ \alpha(x) \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

alors α est stricte, comme nous allons le montrer.
Soit u une solution de (1.1) telle que $u \geq \alpha$. Comme u est une sous-solution propre, nous avons $u \neq \alpha$. Ce qui signifie qu'il existe au moins un point x de Ω tel que $u(x) > \alpha(x)$.
Supposons qu'il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $(u-\alpha)(x_0) = 0$. Le point x_0 serait le lieu d'un minimum global de $u - \alpha$.
Commençons par examiner le cas où $x_0 \in \Omega$. Dans ce cas, il existerait un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $x_0 \in \Omega_1$ et $\forall x \in \Omega_1\,,\ 0 \leq (u-\alpha)(x) \leq \epsilon$. Et il est toujours possible de choisir Ω_1 suffisamment grand pour qu'il contienne un point x_1 tel que $u(x_1) - \alpha(x_1) > 0$.
Nous aurions alors $\forall\,\text{p.p.}\, x \in \Omega_1\,,\ -\Delta(u-\alpha)(x) \geq f(x,u(x)) - f(x,u(x)) = 0$.
Le principe du maximum (cf. Rappel 1.3) s'applique et il indique que cette situation là est impossible. Ce qui signifie que $\forall\,\text{p.p.}\, x \in \Omega\,,\ (u-\alpha)(x) > 0$.
Dans le cas où $x_0 \in \partial\Omega$, on aurait de même l'existence d'une boule ouverte $B \subset \Omega$ telle que $x_0 \in \partial B$ et $\forall x \in B\,,\ 0 < (u-\alpha)(x) \leq \epsilon$. On aurait alors $\forall\,\text{p.p.}\, x \in B\,,\ -\Delta(u-\alpha)(x) \geq 0$.
On applique alors le principe du maximum de Hopf (cf. Rappel 1.4) qui indique dans ce cas que

$$\frac{\partial}{\partial n}(u-\alpha)(x_0) < 0\ .$$
Ce qui montre que $u >> \alpha$. On en conclut que la sous solution α est stricte.

4. Existence et localisation de solutions de (1.1) lorsqu'on connait une sous-solution et une sur-solution de (1.1) mal ordonnées

Nous noterons dans toute cette partie λ_1 et λ_2, respectivement, la première et la deuxième valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$.

Le théorème suivant constitue une alternative au Théorème 2.1 dans le cas où le problème (1.1) admet une sous-solution α et une sur-solution β qui ne vérifient pas $\alpha \leq \beta$.
Notons préalablement que, grâce à la Remarque 2.4, nous savons que la seule existence de α et β ne suffit pas pour garantir l'existence d'une solution du problème (1.1).
Dans cette remarque-là, nous avons observé qu'il faut éviter une interaction trop forte de la fonction f avec la partie supérieure du spectre de $-\Delta$. On doit donc rajouter une condition qui évite une telle interaction.
Ceci justifie l'introduction de l'hypothèse supplémentaire dans le théorème suivant :
Théorème 4.1 : On suppose que la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est L^p-Carathéodory, avec $p > n$, et que le problème (1.1) admet une sous-solution α et une sur-solution β telles que :
$\exists x_0 \in \Omega\ ,\ \alpha(x_0) > \beta(x_0)$.
Ajoutons l'hypothèse :

$$\exists h \in L^p(\Omega)\ ,\ \forall \text{p.p. } x \in \Omega\,,\ \forall u \in \mathbb{R}\,,\ |f(x,u) - \lambda_1 u| \leq h(x)\,. \tag{4.1}$$

Dans ce cas, (1.1) admet au moins une solution $u \in \overline{\mathcal{V}}$ où

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{C}_B^1(\overline{\Omega}) \ \mid \ u \ngeq \alpha \text{ et } u \nleq \beta\} = \{u \in \mathcal{C}_B^1(\overline{\Omega}) \ \mid \ \min(u-\alpha) < 0 < \max(u-\beta)\}\,.$$

Preuve : Considérons le problème modifié suivant, dans lequel r désigne un paramètre réel strictement positif

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda_1 u(x) + g_r(x, u(x)) & \text{dans } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

où

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \forall \text{p.p. } x \in \Omega\,,\ g_r(x,z) = \begin{cases} f(x,z) - \lambda_1 z & \text{si } |z| < r\,, \\ (1 + r - |z|)\,(f(x,z) - \lambda_1 z) - (|z| - r)\frac{z}{r} & \text{si } |z| \in [r, r+1]\,, \\ -\frac{z}{r} & \text{si } |z| > r+1\,. \end{cases}$$

•• *Première étape :* Il existe α_1 sous-solution de (4.2) telle que $\alpha_1 \leq -r-2$ et il existe β_2 sur-solution de (4.2) telle que $\beta_2 \geq r+2$.
En effet, considérons la solution w du problème

$$\begin{cases} -\Delta w = (\lambda_1 - \frac{1}{r})w & \text{sur } \Omega\,, \\ w = r+2 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

et notons φ_1 la fonction propre associée à λ_1 qui vérifie $\|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} = 1$ et $\varphi_1 >> 0$.

Soit k un réel positif suffisamment grand pour avoir $k\varphi_1 + w \geq r+2$ sur $\overline{\Omega}$. Un tel réel existe parce que $(r+2) - w \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$.

Posons $\beta_2 = k\varphi_1 + w$ et $\alpha_1 = -\beta_2$.

Nous avons, $-\Delta\beta_2 = \lambda_1 k\varphi_1 + (\lambda_1 - \dfrac{1}{r})w = \lambda_1 k\varphi_1 + (\lambda_1 - \dfrac{1}{r})(\beta_2 - k\varphi_1) = (\lambda_1 - \dfrac{1}{r})\beta_2 + \dfrac{1}{r}k\varphi_1$ dans Ω. Nous en déduisons $-\Delta\beta_2 \geq (\lambda_1 - \dfrac{1}{r})\beta_2 = \lambda_1\beta_2 + g_r(x,\beta_2)$ dans Ω.

Nous avons également $\beta_2 \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Donc β_2 est une sur-solution de (4.2).

De la même manière nous pouvons montrer que α_1 est une sous-solution de (4.2) et nous avons à l'évidence $\alpha_1 << \beta_2$.

•• *Deuxième étape :* Montrons que, pour tout réel $r > \max(\|\alpha\|_\infty\, , \|\beta\|_\infty)$, il existe une solution u_r du problème (4.2) telle que $u_r \in \overline{\mathcal{V}}$.

Sous la condition ci-dessus, α et β sont respectivement une sous-solution et une sur-solution du problème (4.2).

Nous nous trouvons alors quasiment dans la situation du Théorème 3.5 vis-à-vis du problème (4.2) ; α et β jouant respectivement les rôles de α_2 et β_1. La seule différence est que nous n'avons pas nécessairement le caractère strict de α et β.

Deux situations peuvent alors se présenter :

- Ou bien α et β sont strictes et, par le Théorème 3.5, il existe une solution u_r du problème (4.2) telle que $u_r \in \mathcal{V}$.
- Ou bien α et β ne sont pas strictes et il existe alors une solution u_r du problème (4.2) telle que $u_r \in \partial\mathcal{V}$.

Par conséquent, il existe dans tous les cas une solution u_r du problème (4.2) telle que $u_r \in \overline{\mathcal{V}}$.

Il reste à montrer qu'il existe $r > 0$, tel que u_r soit une solution du problème initial (1.1).

•• *Troisième étape :* Montrons qu'il existe une constante réelle positive K telle que

$$\forall r \geq K\, ,\ \forall u \text{ solution de (4.2) telle que } u \in \overline{\mathcal{V}}\, , \text{ on ait } \|u\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < K\, .$$

Si tel n'était pas le cas, nous aurions :

$$\forall n \in I\!N,\ \exists r_n > n\, ,\ \exists u_n \text{ solution de (4.2) avec } r = r_n \text{ telle que } u_n \in \overline{\mathcal{V}} \text{ et } \|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} > n\, .$$

Posons, pour tout $n \in I\!N$, $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}}$. Nous avons alors, pour tout $n \in I\!N$

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \lambda_1 v_n + \dfrac{g_{r_n}(x,u_n)}{\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} & \text{dans } \Omega\, , \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega\, . \end{cases}$$

Nous pouvons décomposer g_{r_n} sous la forme $g_{r_n}(x,u_n) = p_n(x,u_n)u_n + q_n(x,u_n)$, avec p_n et q_n deux fonctions qui vérifient : $\forall$ p.p. $x \in \Omega$, $-\dfrac{1}{r_n} \leq p_n(x,u_n(x)) \leq 0$ et $|q_n(x,u_n(x))| \leq h(x)$.

On en déduit que la suite $\left((\lambda_1 + p_n(x,u_n))v_n + \dfrac{q_n(x,u_n)}{\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} \right)$ est bornée dans $L^p(\Omega)$.

Ce qui signifie que $\exists c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\| (\lambda_1 + p_n(x,u_n))v_n + \dfrac{q_n(x,u_n)}{\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq c$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq cC$, où C est la constante définie en (1.3).

Nous pouvons donc extraire de la suite (v_n) une sous-suite $(v_{n_m})_m$ telle que $v_{n_m} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} v$ faiblement dans $W^{2,p}(\Omega)$ et telle que $v_{n_m} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} v$ fortement dans $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$ grâce à l'injection compacte de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$.

Par passage aux limites, nous voyons que la fonction v vérifie

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_1 v & \text{dans } \Omega\,, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Et, comme $\|v\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} = 1$, nous avons $v = \pm\varphi_1$.

Selon que la suite $(v_{n_m})_m$ converge vers φ_1 ou vers $-\varphi_1$ dans $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, nous avons à partir d'un certain rang M, $\dfrac{u_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} - \varphi_1 \geq -\dfrac{1}{2}\varphi_1$ ou $\dfrac{u_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} + \varphi_1 \leq \dfrac{1}{2}\varphi_1$.

C'est-à-dire que, pour $m \geq M$, nous avons : $u_{n_m} \geq \dfrac{1}{2}\|u_{n_m}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\,\varphi_1 >> \alpha$ ou bien $u_{n_m} \leq -\dfrac{1}{2}\|u_{n_m}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\,\varphi_1 << \beta$.

Ce qui, pour un rang m assez grand, contredit la localisation de u_{n_m} qu'implique son appartenance à $\overline{\mathcal{V}}$ et montre, de ce fait, la 3ème étape.

•• *Conclusion :* Pour tout réel $r \geq K$, nous avons mis en évidence dans la 2ème étape l'existence d'une solution u_r de (4.2) appartenant à $\overline{\mathcal{V}}$.

Dans la 3ème étape, nous avons prouvé que $\|u_r\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < K \leq r$.

Par construction, u_r est donc solution de (1.1). ∎

La condition (4.1) du Théorème 4.1, conduisant à l'existence d'une solution du problème (1.1) appartenant à $\overline{\mathcal{V}}$ est trop restrictive. Le corollaire suivant l'améliore.

<u>Corollaire 4.2 :</u> On reprend les mêmes hypothèses que le Théorème 4.1 sauf l'hypothèse (4.1) que l'on remplace par l'hypothèse suivante.

Supposons qu'il existe une fonction $h \in L^p(\Omega)$ et deux réels a et γ vérifiant $a \leq \lambda_1 < \gamma < \lambda_2$ tels que f s'écrive : $\forall$ p.p. $x \in \Omega$, $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$f(x,u) = p(x,u)u + q(x,u)\ , \text{ avec } a \leq p(x,u) \leq \gamma \text{ et } |q(x,u)| \leq h(x)\,. \tag{4.3}$$

Alors il existe une solution u de (1.1) telle que $u \in \overline{\mathcal{V}}$.

Preuve : Considérons un réel $r > 0$ et posons

$$f_r(x,z) = \begin{cases} f(x,z) & \text{si } |z| < r\,, \\ (1+r-|z|)f(x,z) + (|z|-r)\lambda_1 z & \text{si } r \leq |z| \leq r+1\,, \\ \lambda_1 z & \text{si } r+1 < |z|\,. \end{cases} \tag{4.4}$$

Montrons que f_r vérifie la majoration (4.1).

Notons $d_r(x,z) = \mid f_r(x,z) - \lambda_1 z \mid$. Nous avons :

$$d_r(x,z) = \begin{cases} \mid (p(x,z)-\lambda_1)z + q(x,z) \mid & \text{si } |z| < r\,, \\ (1+r- \mid z \mid) \mid f(x,z) - \lambda_1 z \mid \leq \mid (p(x,z)-\lambda_1)z + q(x,z) \mid & \text{si } r \leq |z| \leq r+1\,, \\ 0 & \text{si } r+1 < |z|\,. \end{cases}$$

Il en résulte que : $\forall\,\text{p.p. } x \in \Omega\,,\ \forall z \in \mathbb{R}\,,\ d_r(x,z) \leq (\gamma - a)(r+1) + h(x)\,.$

Or, il est clair que la fonction $\tilde{h}_r$ définie par : $\forall\,\text{p.p. } x \in \Omega\,,\ \tilde{h}_r(x) = (\gamma - a)(r+1) + h(x)$ appartient à $L^p(\Omega)$.

Pour tout $r > \max\{\|\alpha\|_\infty, \|\beta\|_\infty\}$, on peut donc appliquer le Théorème 4.1 au problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f_r(x,u(x)) & \text{sur } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{4.5}$$

On en déduit que pour tout $r > \max\{\|\alpha\|_\infty\,,\, \|\beta\|_\infty\}$, le problème (4.5) admet une solution $u_r \in \overline{\mathcal{V}}$.

Montrons qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour tout $r > K$, pour toute solution u_r de (4.5) appartenant à $\overline{\mathcal{V}}$, on a $\|u_r\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < K$.

Faisons un raisonnement par l'absurde.

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists r_n > K\,,\ \exists u_n \in \overline{\mathcal{V}}$, solution de (4.5) avec $r = r_n$ et telle que $\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} > n\,.$

Posons $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}}$. On observe que v_n est solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta v_n(x) = p_{r_n}(x,u_n(x))\,v_n(x) + \dfrac{q_{r_n}(x,u_n(x))}{\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} & \text{dans } \Omega\,, \\ v_n(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall\,\text{p.p. } x \in \Omega\,,\ a \leq p_{r_n}(x,u_n(x)) \leq \gamma$ et $\mid q_{r_n}(x,u_n(x)) \mid \leq h(x)$.

La suite $\left(p_{r_n}(\cdot,u_n)\,v_n + \dfrac{q_{r_n}(\cdot,u_n)}{\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} \right)$ est bornée dans $L^p(\Omega)$.

Nous avons donc par (1.3) l'existence d'un réel $c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|v_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq c\,.$

Nous pouvons donc extraire de (v_n) une sous-suite $(v_{n_m})_m$ telle que $v_{n_m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} v$ faiblement dans $W^{2,p}(\Omega)$ et $v_{n_m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} v$ fortement dans $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$.

D'autre part, $p_{r_n}(\cdot, u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$ faiblement dans $L^p(\Omega)$, avec $a \le p(x) \le \gamma$, et $\dfrac{q_{r_n}(\cdot, u_n)}{\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ fortement dans $L^p(\Omega)$.

Par passage aux limites, nous obtenons que v est solution de

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = p(x)v(x) & \text{dans } \Omega\,, \\ v(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

avec $a \le p(x) \le \gamma < \lambda_2$ et $\|v\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} = 1$.

Montrons que $v >> 0$ ou $v << 0$.

Le fait que ce problème ait une solution non triviale signifie que 0 est valeur propre du problème

$$\begin{cases} -\Delta v(x) - p(x)v(x) = \mu v(x) & \text{dans } \Omega, \\ v(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour montrer que $v >> 0$ ou $v << 0$, il suffit donc de montrer que 0 est la première valeur propre de ce problème.

Rappelons la caractérisation des valeurs propres

$$\mu_k = \min_{X_k \in \mathcal{E}_k} \max_{u \in X_k \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 - p(x)u^2(x)\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\, dx},$$

où $\mathcal{E}_k$ est l'ensemble des sous-espaces de $H_0^1(\Omega)$ de dimension k.

De même les valeurs propres λ_k du laplacien dans $H_0^1(\Omega)$ sont caractérisées par

$$\lambda_k = \min_{X_k \in \mathcal{E}_k} \max_{u \in X_k \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)\, dx}.$$

Puisque, pour presque tout $x \in \Omega$, $p(x) \le \gamma$ on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu_k \ge \lambda_k - \gamma.$$

Comme $\gamma < \lambda_2$ on en déduit que, pour tout $k \ge 2$, $\mu_k > 0$ et donc la seule valeur propre qui peut être nulle est la première et donc v est la première fonction propre de ce problème. Il en résulte que $v >> 0$ ou $v << 0$.

On conclut alors comme dans la preuve du Théorème 4.1. ∎

Dans le cas où le problème (1.1) présente une sous-solution de plus que dans le Corollaire 4.2 avec $\alpha_1 \le \beta$ et $\alpha_1 \le \alpha$, en gardant les hypothèses du Corollaire 4.2, on obtient un résultat de multiplicité en appliquant le Théorème 2.1 et le Corollaire 4.2. Dans le résultat suivant, nous allons montrer qu'il est possible de se passer de la borne supérieure sur γ.

Corollaire 4.3 : Supposons que le problème (1.1) admette deux sous-solutions α_1 et α_2 et une sur-solution stricte β qui vérifient : $\alpha_1 \leq \beta$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$ et $\alpha_2 \not\leq \beta$.

Supposons, de plus, qu'il existe une fonction $h \in L^p(\Omega)$ et deux réels a et b vérifiant $a \leq \lambda_1 \leq b$, tels que f s'écrive

$$\forall\,\text{p.p. } x \in \Omega\,,\ \forall u \in [\alpha_1(x), +\infty[\,,\ f(x,u) = p(x,u)u + q(x,u)\,,$$

avec $a \leq p(x,u) \leq b$ et $\mid q(x,u) \mid \leq h(x)$.

Alors il existe au moins deux solutions u_1 et u_2 du problème (1.1) qui vérifient

$$\alpha_1 \leq u_1 \leq \beta \ \ , \ \ u_2 \geq \alpha_1 \ \text{ et } \ u_2 \in \overline{\mathcal{V}}\,.$$

Preuve : L'existence d'une première solution u_1 de (1.1) s'obtient en appliquant le Théorème 2.1. Montrons l'existence d'une deuxième solution.

Nous allons procéder comme dans la preuve du Corollaire 4.2.

Considérons le problème modifié suivant, dans lequel r désigne un paramètre réel strictement positif

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f_r(x, u(x)) & \text{dans } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4.6}$$

où

$$\forall\,\text{p.p. } x \in \Omega\,,\ \forall u \in I\!R,\ f_r(x,u) = \begin{cases} f(x, \alpha_1(x)) & \text{si } u \leq \alpha_1(x)\,, \\ f(x,u) & \text{si } \alpha_1(x) < u < r\,, \\ (u-r)\lambda_1 u + (r+1-u)f(x,u) & \text{si } r \leq u \leq r+1\,, \\ \lambda_1 u & \text{si } u > r+1\,. \end{cases}$$

Observons que, comme dans la preuve du Théorème 2.1, on montre que toute solution u de (4.6) vérifie $u \geq \alpha_1$.

Comme dans la preuve du Corollaire 4.2, on montre que le problème (4.6) a une solution $u_r \in \overline{\mathcal{V}}$.

Et comme dans cette même preuve, il reste à montrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout $r > K$, pour toute solution u_r de (4.6) appartenant à $\overline{\mathcal{V}}$ on a $\|u_r\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < K$.

Comme dans la preuve du Corollaire 4.2, on fait un raisonnement par l'absurde en supposant que $\forall n \in I\!N$, $\exists r_n > K$, $\exists u_n \in \overline{\mathcal{V}}$ solution de (4.6) avec $r = r_n$, et telle que $\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} > n$.

Comme précédemment, on montre qu'alors la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}}$ converge fortement vers une fonction v dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

La fonction v est alors solution de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = p(x)v(x) & \text{dans } \Omega\,, \\ v(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

avec $a \leq p(x) \leq b$.

Mais comme cette fois-ci on a, en plus, $u_n \geq \alpha_1$, on en déduit que $v \geq 0$.

On a donc que v est une solution non triviale de

$$\begin{cases} -\Delta v(x) - av(x) = (p(x)-a)v(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ v(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ v(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

On en déduit, grâce au principe du maximum, que $v >> 0$.

On conclut alors comme dans le Théorème 4.1. ■

Nous pouvons aussi considérer une situation où f peut être superlinéaire, comme dans le corollaire suivant.

<u>Corollaire 4.4 :</u> On reprend les mêmes hypothèses que le Théorème 4.1, excepté l'hypothèse (4.1) que l'on remplace par l'hypothèse suivante.

Il existe $h \in L^p(\Omega)$ et $\delta \in \left]1, \dfrac{n}{n-1}\right[$ (en convenant que $\dfrac{1}{0} = +\infty$) tels que f vérifie

$$\forall\,\text{p.p. } x \in \Omega\,,\ \forall u \in I\!R\,,\ -h(x) \leq f(x,u) - \lambda_1 u \leq |u|^\delta + h(x)\,.$$

Alors le problème (1.1) admet une solution $u \in \overline{\mathcal{V}}$.

<u>Preuve :</u> Comme dans la preuve du Corollaire 4.2, nous montrons que le problème (4.5), dans lequel f_r est définie par (4.4) et r désigne un réel $r > \max\{\|\alpha\|_\infty\,,\ \|\beta\|_\infty\}$, admet une solution $u_r \in \overline{\mathcal{V}}$.

Montrons qu'il existe un réel $K > 0$ tel que : $\forall r \in]K, +\infty[\,,\ \forall u_r \in \overline{\mathcal{V}}$ solution de (4.5), on a $\|u_r\|_{\mathcal{C}^1(\Omega)} < K$.

Nous avons $f_r(x,z) = \lambda_1 z + g_r(x,z) + h_r(x,z)$, g_r et h_r étant deux fonctions qui vérifient $\forall\,\text{p.p. } x \in \Omega\,,\ \forall z \in I\!R\,,\ 0 \leq g_r(x,z) \leq |z|^\delta$ et $|h_r(x,z)| \leq h(x)$, où $h \in L^p(\Omega)$.

On a donc

$$\begin{cases} -\Delta u_r(x) = \lambda_1 u_r(x) + g_r(x,u_r(x)) + h_r(x,u_r(x)) & \text{dans } \Omega\,, \\ u_r(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

En multipliant cette équation par φ_1 et en intégrant, on obtient ceci :

$$\int_\Omega g_r(x,u_r(x))\varphi_1(x)dx = -\int_\Omega h_r(x,u_r(x))\varphi_1(x)dx\,.$$

D'où l'on déduit que $\displaystyle\int_\Omega |g_r(x,u_r(x))|\varphi_1(x)dx = \int_\Omega g_r(x,u_r(x))\varphi_1(x)dx \leq \int_\Omega h(x)\varphi_1(x)dx\,.$

Soit q un réel tel que $q > n$. Nous avons l'égalité

$$\int_\Omega |g_r(x,u_r(x))|^q dx = \int_\Omega |g_r(x,u_r(x))|\varphi_1(x)\,\frac{|g_r(x,u_r(x))|^{q-1}}{\varphi_1(x)}\,dx$$

et nous en déduisons qu'il existe un réel $K_1 > 0$ tel que nous ayons les inégalités

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mid g_r(x,u_r(x)) \mid^q dx &\leq \int_\Omega |g_r(x,u_r(x))|\varphi_1(x)\, \frac{|u_r(x)|^{\delta(q-1)}}{\varphi_1(x)^{\delta(q-1)}}\, \varphi_1(x)^{\delta(q-1)-1} dx \\ &\leq K_1 \, \|u_r(x)\|^{\delta(q-1)}_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} \,,\end{aligned}$$

pourvu que $\delta(q-1)-1 \geq 0$.
Il en résulte que $\|g_r(x,u_r)\|_{L^q(\Omega)} \leq K_1{}^{\frac{1}{q}} \, \|u_r\|^{\frac{\delta(q-1)}{q}}_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}$.
Choisissons q tel qu'il vérifie, à la fois, $q > n$, $q \geq \dfrac{1+\delta}{\delta}$ et $\dfrac{\delta(q-1)}{q} < 1$ (voir la remarque ci-après).
Supposons maintenant que, pour tout $k \in I\!N$, il existe un réel $r_k \geq k$ et une solution u_k de (4.5) avec $r = r_k$ qui appartient à $\overline{\mathcal{V}}$ et telle que $\|u_k\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} \geq k$.
Posons $v_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}}$. Nous avons

$$\forall \, \text{p.p. } x \in \Omega\,, \; -\Delta v_k(x) = \lambda_1 v_k(x) + \frac{g_{r_k}(x,u_k(x))}{\|u_k\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} + \frac{h_{r_k}(x,u_k(x))}{\|u_k\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}}\,.$$

Or $\dfrac{\|g_{r_k}(\cdot,u_k)\|_{L^q(\Omega)}}{\|u_k\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} \leq \|u_k\|^{\frac{\delta(q-1)}{q}-1}_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}$ et $\dfrac{\|h_{r_k}(\cdot,u_k)\|_{L^p(\Omega)}}{\|u_k\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}} \leq \dfrac{\|h\|_{L^p(\Omega)}}{\|u_k\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}}$.
Comme on a $\frac{\delta(q-1)}{q} - 1 < 0$, on déduit de ce qui précède que $\dfrac{g_{r_k}(\cdot,u_k)}{\|u_k\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}}$ et $\dfrac{h_{r_k}(\cdot,u_k)}{\|u_k\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}}$ tendent vers la fonction nulle dans $L^r(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$, avec r=min(p,q).
Par (1.3) nous avons que la suite (v_n) est bornée dans $W^{2,r}(\Omega)$ et nous pouvons donc en extraire une sous-suite $(v_{n_m})_m$ telle que $v_{n_m} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} v$ faiblement dans $W^{2,r}(\Omega)$ et $u_{n_m} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} v$ fortement dans $\mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, avec v solution de

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_1 v & \text{dans } \Omega\,, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Comme $\|v\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}$, on en déduit que $v = \pm\varphi_1$.
La démonstration s'achève alors exactement comme celle du Théorème 4.1. ■

Remarque 4.1 : Au cours de la démonstration, nous avons eu besoin de choisir le paramètre réel q répondant aux conditions : $q > n$, $q \geq \dfrac{1+\delta}{\delta}$ et $\dfrac{\delta(q-1)}{q} < 1$. Et il est nécessaire de s'assurer de la compatibilité de ces trois conditions.
Dans le cas où $n = 1$, l'ensemble de ces conditions se résume à : $\dfrac{1+\delta}{\delta} < q < \dfrac{\delta}{\delta-1}$, et il y a une infinité de nombres q qui vérifient cette double inégalité grâce au fait que $\delta > 1$.
Dans le cas où $n \geq 2$, l'ensemble de ces conditions se résume à : $n < q < \dfrac{\delta}{\delta-1}$, et il y a une infinité de nombres q qui vérifient cette double inégalité grâce au fait que $1 < \delta < \dfrac{n}{n-1}$.

5. Applications : Solutions positives

Nous nous intéressons maintenant au problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = a(x)g(u(x)) & \text{dans } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{5.1}$$

dans lequel $a \in L^\infty(\Omega)$, $a \gneqq 0_{L^\infty(\Omega)}$ et g désigne une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère l'opérateur $T_3 : \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$, qui à $v \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$ associe $u = T_3(v)$ qui est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = a(x)v(x) & \text{dans } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

On désigne par λ_1 l'inverse de la première valeur propre de l'opérateur T_3 et par φ_1 une fonction propre associée à λ_1, qui vérifie $\varphi_1 >> 0$. Nous avons :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1(x) = \lambda_1 a(x)\varphi_1(x) & \text{dans } \Omega\,, \\ \varphi_1(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Théorème 5.1 : (cas **sous-linéaire**)

Si

(i) $\exists \delta > 0$ tel que $\forall u \in]0, \delta[\,,\ g(u) \geq \lambda_1 u$,

(ii) $\exists k < \lambda_1,\ \exists R > 0$ tels que $\forall u > R\,,\ g(u) \leq ku\,,$

alors le problème (5.1) admet au moins une solution u telle que $u >> 0$.

Preuve : Posons $\alpha = A\varphi_1$, avec A une constante réelle positive telle que $\forall x \in \overline{\Omega}\,,\ A\varphi_1(x) \leq \delta$.

La fonction α est sous-solution de (5.1). En effet,

$$\begin{cases} -\Delta\alpha(x) & = A\lambda_1 a(x)\varphi_1(x) & , \\ & = \lambda_1 a(x)\alpha(x) \leq a(x)g(\alpha(x)) & \text{dans } \Omega \\ \alpha(x) = 0 & & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

D'autre part, la fonction $u \longmapsto g(u) - ku$ est bornée sur $]0, R]$ en tant que fonction continue. Ce qui entraîne l'existence d'une réel $l > 0$ tel que $\forall u \in]0, R]\,,\ g(u) - ku \leq l$.

Compte tenu de cela et de l'hypothèse (ii), g vérifie : $\forall u > 0\,,\ g(u) \leq ku + l$.

Considérons la solution w du problème

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = a(x)(kw(x) + l) & \text{dans } \Omega\,, \\ w(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Posons $\beta = B\varphi_1 + w$, avec B une constante réelle positive et choisie suffisamment grande, de sorte que $\beta > 0$.

La fonction β est une sur-solution de (5.1). En effet,

$$\begin{cases} -\Delta\beta(x) & = a(x)(\lambda_1 B\varphi_1(x) + kw(x) + l) & \\ & \geq a(x)(k\beta(x) + l) \geq a(x)g(\beta(x)) & \text{dans } \Omega\,, \\ \beta(x) = 0 & & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

De plus, si B est suffisamment grand, on a $\beta \geq \alpha$ et, d'après le Théorème 2.1, il existe une solution du problème (5.1) située entre α et β.

Nous avons donc en particulier : $u \geq \alpha >> 0$. ■

Théorème 5.2 : (cas **sur-linéaire**)

On suppose que $g(0) = 0$. Si

(i) $\exists \delta > 0$ tel que $\forall u \in]0, \delta[\,,\ g(u) \leq \lambda_1 u$,

(ii) $\exists k > \lambda_1,\ \exists R > 0$ tels que $\forall u > R\,,\ g(u) \geq ku\,$,

(iii) $\exists \delta \in \left]1, \dfrac{n}{n-1}\right[$, $\exists l > 0$ tels que $\forall u \geq 0\,,\ g(u) \leq \lambda_1 u + l + u^\delta$,

alors le problème (5.1) admet au moins une solution u telle que $u \gneqq 0$.

Preuve : Il suffit d'adapter la preuve du théorème 5.1 pour mettre en évidence l'existence d'une sous-solution α et d'une sur-soution β du problème (5.1) qui vérifient $0 << \beta \leq \delta$ et $\alpha >> \beta$.

Considérons ensuite le problème modifié

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u(x) = a(x)\,\overline{g}(u(x)) & \text{dans } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{array}\right. \tag{5.2}$$

où

$$\overline{g}(u) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } u < 0\,, \\ g(u) & \text{si } u \geq 0\,. \end{array}\right.$$

Comme au Théorème 2.1, on montre que toute solution u de (5.2) vérifie $u \geq 0$ et est, par conséquent, une solution de (5.1).

De plus, les fonctions α et β construites ci-dessus sont respectivement une sous-solution et une sur-solution de (5.2).

On déduit donc, comme aux Corollaires 4.3 et 4.4, qu'il existe une solution u de (5.2) telle que $u \in \overline{\mathcal{V}}$ et, comme $0 \notin \overline{\mathcal{V}}$ (car $\beta >> 0$) nous avons $u \neq 0$.

On en déduit donc l'existence d'une solution u de (5.1) vérifiant $u \gneqq 0$. ■

Remarque 5.1 : Si, en plus des hypothèses du Théorème 5.2, la fonction g vérifie :

$\exists m > 0$ tel que $\forall u > 0\,,\ g(u) \geq -mu$, alors la solution u de (5.1) vérifie en plus :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u(x) + a(x)mu(x) \geq a(x)(g(u(x) + mu(x)) \geq 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{array}\right.$$

Par le principe du maximum, nous en déduisons que $u >> 0$.

Remarque 5.2 : Dans le Théorème 5.2, les hypothèses (i), (ii) et (iii), seules, ne suffisent pas, comme le montre l'exemple suivant.

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u(x) = \lambda_k u(x) - c & \text{dans } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{array}\right. \tag{5.3}$$

où λ_k est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta$, autre que la première et dont on suppose qu'une fonction propre φ_k qui lui est associée a une moyenne non nulle, et où c est une constante réelle strictement positive.

Si le problème (5.3) admettait une solution u, elle vérifierait d'après la formule de Green :

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_\Omega -u(x)\Delta\varphi_k(x)\,dx = \lambda_k \int_\Omega u(x)\varphi_k(x)\,dx\,.$$

Ceci entraînerait que $\displaystyle\int_\Omega \varphi_k(x)\,dx = 0\,.$

Or $\displaystyle\int_\Omega \varphi_k(x)\,dx \neq 0\,.$ Par conséquent, le problème (5.3) n'admet pas de solution.

Pourtant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du Théorème 5.2 sont vérifiées ; sachant qu'ici $g(u) = \lambda_k u - c$.

Notons que $g(0) \neq 0$.

Théorème 5.3 : (cas **sous-sur-linéaire**)

On suppose que $g(0) = 0$. Si

i) $\exists \delta > 0$ tel que $\forall u \in]0, \delta[\,,\ g(u) \geq \lambda_1 u$,

ii) $\exists k > \lambda_1,\ \exists R > 0$ tel que $\forall u > R\,,\ g(u) \geq ku$,

iii) $\exists \delta \in \left]1, \dfrac{n}{n-1}\right[\,, \exists l > 0$ tels que $\forall u \geq 0\,,\ g(u) \leq \lambda_1 u + l + u^\delta$,

iv) $\exists \beta$ sur-solution stricte de (5.1), telle que $\beta >> 0$,

alors le problème (5.1) admet au moins deux solutions u_1 et u_2 telles que : $u_1 >> 0$ et $u_2 >> 0\,.$

Preuve : Comme dans la démonstration du Théorème 5.1, on montre que les hypothèses i) et ii) impliquent l'existence de deux sous-solutions α_1 et α_2 telles que $0 << \alpha_1 << \beta << \alpha_2$.

On en déduit l'existence d'une solution u_1 telle que $\alpha_1 \leq u_1 << \beta$ et qui vérifie donc, en particulier, $u_1 >> 0$.

Considérons le problème modifié

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = a(x)\overline{g}(x, u(x)) & \text{dans } \Omega\,, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{5.4}$$

où

$$\overline{g}(x,u) = \begin{cases} g(u) & \text{si } u \geq \alpha_1(x)\,, \\ g(\alpha_1(x)) & \text{si } u < \alpha_1(x)\,. \end{cases}$$

Comme au Théorème 2.1, on montre que toute solution u de (5.4) vérifie $u \geq \alpha_1$.

De plus, α_2 et β sont, respectivement, sous-solution et sur-solution de (5.4).

On en déduit, comme aux Corollaires 4.3 et 4.4, qu'il existe une solution u_2 de (5.4) telle que $u_2 \in \overline{\mathcal{V}}$ et, en particulier, que $u_2 \neq u_1$.

On en déduit l'existence de deux solutions u_1 et u_2 de (5.1) telles que $u_i \geq \alpha_1 >> 0$, pour $i \in \{1, 2\}$. ■

Théorème 5.4 : (cas **sur-sous linéaire**)

On suppose que $g(0) = 0$. Si

i) $\exists \delta > 0$ tel que $\forall u \in]0, \delta[\,,\ g(u) \leq \lambda_1 u$,

ii) $\exists k \in]0, \lambda_1[,\ \exists R > 0$ tel que $\forall u > R\,,\ g(u) \leq ku$,

iii) $\exists \alpha$ sous-solution stricte de (5.1) telle que $\alpha >> 0$,

alors le problème (5.1) admet au moins deux solutions u_1 et u_2 telles que $u_1 \gneqq 0$, $u_2 >> 0$ et $u_1 \lneqq u_2$.

Preuve : Comme dans la démonstration du Théorème 5.1, les hypothèses i) et ii) impliquent l'existence de deux sur-solutions β_1 et β_2 telles que $0 << \beta_1 << \alpha << \beta_2$.

Remarquons que la fonction nulle est, elle aussi, une sous-solution de (5.1). Les hypothèses du Théorème d'Amann sont donc vérifiées. Et nous déduisons, en vertu du Corollaire 3.4, l'existence de deux solutions u_1 et u_2 (qui correspondent, dans l'ordre, à u_3 et u_2 dans le Corollaire 3.4) telles que $u_1 \lneqq u_2$, $u_1 \geq 0$, $u_1 \not\leq \beta_1$, $u_1 \not\geq \alpha$ et $u_2 >> \alpha$.

Il en résulte que $u_2 >> 0$ et $u_1 \gneqq 0$. ■

Remarque 5.3 : Comme dans la Remarque 5.1, nous aurons $u_1 >> 0$ s'il existe $m > 0$ tel que pour tout $u > 0$, $g(u) \geq -mu$.

Références bibliographiques

[1] **C. De Coster, M.R. Grossinho et P. Habets**, On pairs of positive solutions for a singular boundary value problem, Applicable Analysis 59 (1995), 241-256.

[2] **C. De Coster et P. Habets**, Two-Point Boundary Value Problems : Lower and Upper Solutions, Mathematics in Science and Engineering 205, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3] **N. Rouche et J. Mawhin**, Equations différentielles ordinaires, vol. 2, Masson, Paris, 1973.