UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRÉSIS

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES LAMATH

STRUCTURE ET FONCTIONNEMENT

Activités scientifiques

du 1er janvier 2001 au 30 septembre 2004

STRUCTURE ADMINISTRATIVE

Directeur : Aziz El Kacimi

Secrétaire : Nabila Daifi

Présentation du Laboratoire

Le Laboratoire de Mathématiques **LAMATH** (**UPRES** numéro **EA 2441** regroupe les chercheurs en “Mathématiques pures” de l'*Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.* Il est constitué de deux équipes de recherche. L'une en *Géométrie et Systèmes dynamiques* et l'autre en *Algèbre et Théorie des Nombres.* Les thèmes développés par la première sont principalement l'Analyse globale (réelle et complexe), l'étude des feuilletages et leurs propriétés cohomologiques, le coloriage des quasi-cristaux, la Dynamique symbolique, les C^*-algèbres, la Physique mathématique et la Géométrie des sous-variétés. La deuxième équipe s'intéresse à la théorie de Galois constructive, la cohomologie des groupes, aux structures galoisiennes des anneaux d'entiers, la théorie des catégories et son lien avec la Géométrie algébrique et les groupes algébriques en inégale caractéristique.

Notre laboratoire est aussi impliqué dans des thèmes de recherche pédagogiques en collaboration avec l'IREM et les instances du Secondaire de la région.

Le **LAMATH** comprend 7 professeurs, 13 Maîtres de Conférences et des ATER et Doctorants.

Le **LAMATH** est aussi une équipe d'accueil pour le **DEA en Mathématiques** cohabilité avec l'*Université de Lille I* depuis septembre 1991 et les *Universités* d'*Artois* et du *Littoral* depuis septembre 2000. Les valenciennois ont presque chaque année participé à l'enseignement du **DEA de Mathématiques**, seuls ou en collaboration avec des enseignants-chercheurs de Lille I ; en témoigne la liste qui suit des cours déjà dispensés.

- 1991-92 : *Cohomologie galoisienne et p-extensions.*
  J. C. Douai (Lille) & R. Massy (Valenciennes)
- 1991-92 : *Théorie de Hodge et applications.*
  A. El Kacimi (Valenciennes) & L. Gruson (Lille)
- 1992-93 : *Catégories d'algèbres commutatives.*
  Y. Diers & F. Goichot (Valenciennes)
- 1994-95 : *Anneaux non commutatifs et représentations de groupes.*
  H. Gaudier, D. Hémard & A. Leroy (Valenciennes)
- 1995-96 : *Groupes de Lie classiques et quantiques.*
  D. Gourevitch (Valenciennes) & G. Tuynman (Lille)
- 1995-96 : *Singularités de courbes planes et de feuilletages holomorphes.*
  R. Barre & A. Kabila (Valenciennes) & F. Loray (Lille)
- 1996-97 : *Introduction aux formes automorphes.*
  A. El Kacimi (Valenciennes) & R. Parthasarathy (Lille & TIFR Bombay)

– 1998-99 : *Théorie de Galois et problème de descente.*
M. Hartl, R. Massy (Valenciennes) & C. U. Jensen (U. de Copenhague)

– 2000-01 : *Eléments de topologie algébrique et différentielle.*
A. El Kacimi (Valenciennes)

– 2002-03 : *Théorie algébrique des nombres : structure galoisienne des anneaux d'entiers.*
B. Sodaïgui (Valenciennes)

– 2004-05 : *Géométrie des sous-variétés et visualisation.*
A. El Kacimi & L. vrancken (Valenciennes)

Outre ces activités de recherche proprement dite, notre laboratoire est impliqué dans le projet de création de la *Cité des Géométries* piloté par la ville de Maubeuge. A diverses reprises, nous avons participé aux activités préliminaires qui accompagnent sa réalisation. Par exemple, une *Ecole de Géométrie et Visualisation* a été organisée à Maubeuge du 21 au 25 juin 2004 par le Lamath et l'Association pour la Création de la Cité des Géométries.

Notre laboratoire est membre de la convention **B2RM** (Bibliothèque Régionale de Recherche en Mathématiques) qui est la Bibliothèque de l'UFR de Mathématiques de l'Université de Lille I.

Nos perspectives pour les années à venir ont comme objectif principal le développement des thèmes sus-mentionnés, par la recherche proprement dite et la formation par la recherche dans le cadre du Master de Mathématiques pures et du programme doctoral.

A. El Kacimi
Directeur

Composition du Laboratoire

Professeurs

- BARRE Raymond
- DIERS Yves (Retraité depuis septembre 2002)
- EL KACIMI ALAOUI Aziz
- GAUDIER Henri
- GOUREVITCH Dimitri
- HARTL Manfred
- MASSY Richard
- VRANCKEN Luc (depuis septembre 2002)
- PARTHASARATHY Rajagopalan (Tata Institute, Mumbai) (PAST pour 1999, 2000 et 2001).

Maîtres de Conférences

- BIREMBAUX Olivier
- GOICHOT François
- HÉMARD Denis
- KABILA Abdelhak (Habilité)
- LOISEAU Bruno
- MONIER-DERVIAUX Sylvie
- OHN Christian (depuis septembre 2002)
- SODAÏGUI Bouchaïb (Habilité)
- VALEIN Jean-Luc
- VAN DEN BOSCH Pascal
- VANDERWINDEN Anne-Joëlle
- ZAFINDRATAFA Georges
- ZEGGAR Abdellatif

Doctorants et ATER

– ANDRÉO Emmanuel	**Bourse MENRT et Monitorat**
– BRUCHE Clément	**Bourse MENRT**
– DEHGHAN-NEZHAD Akbar	**Boursier du Gouvernement Iranien**
– GODIN Marjory	**ATER**
– LECLERCQ Régis	**Enseignant second degré**
– ROUSSEAU Cédric	**Bourse MENRT et Monitorat**
– SLIMÈNE Jihène	**Cotutelle**
– TRABELSI Houda	**Vacataire**

ACTIVITÉS DE RECHERCHE

Ce sont les activités générales du laboratoire dans son ensemble et de chacun de ses membres au sein de son équipe depuis le 1er janvier 2001. Elles consistent en :

– les thèses soutenues ou en cours,

– les publications dans les revues à comité de lecture et les prépublications,

– les colloques et journées organisées par des valenciennois,

– les séjours scientifiques, les conférences invitées aux congrès, colloques ou journées *etc.* ailleurs ou dans le Nord-Pas de Calais,

– les exposés aux séminaires, qui sont limités à ceux donnés dans des universités en dehors de la région du Nord-Pas de Calais. Ceux faits dans notre région sont omis sauf si le chercheur souhaite les mentionner.

Chaque membre du laboratoire a eu la possibilité de développer, de façon détaillée et à sa convenance, les résultats qu'il a obtenus ainsi que les perspectives d'avenir.

La formation par la recherche est une composante centrale de notre travail. Nous avons donc jugé important de commencer ce rapport par répertorier toutes les thèses qui ont été soutenues au sein de notre laboratoire depuis le 1er janvier 1991 ainsi que celles qui sont en cours.

Thèses soutenues

(1) – Koudsi Elie : (avril 1991) (a donné lieu à publication)
Algèbres de Boole non commutatives.
Financement : Vacations
Directeur : Y. Diers

(2) – Zeggar Abdellatif : (juin 1992) (a donné lieu à publication)
Nombre de Lefschetz basique pour un feuilletage riemannien.
Financement : Bourse CIES puis ATER
Directeur : A. El Kacimi

(3) – Belliart Michel : (février 1995) (a donné lieu à publication)
Actions de groupes de Lie sur les variétés compactes.
Financement : Allocation de Recherche MENRT
Directeur : A. El Kacimi

(4) – Birembaux Olivier (décembre 1997) (a donné lieu à publication)
Actions de groupes résolubles. Scindement de $\mathcal{F}$-fibrés.
Financement : Allocation de Recherche MENRT puis ATER
Directeur : A. El Kacimi

(5) – Gmira Bouchra (juillet 1997) (a donné lieu à publication)
Thèse d'Etat, Université de Tétouan (préparée à Valenciennes).
Sur la stabilité kählérienne transverse.
Financement : Détachée du gouvernement marocain
Directeur : A. El Kacimi

(6) – Monier-Derviaux Sylvie (décembre 1998) (a donné lieu à publication)
Le problème de la descente galoisienne finie.
Financement : Vacations puis ATER
Directeur : R. Massy

(7) – Nison Laurence (juin 1998) (a donné lieu à publication)
Sur les catégories de variétés algébriques.
Financement : Vacations puis ATER
Directeur : Y. Diers

(8) – Akueson Philippe (décembre 1998) (a donné lieu à publication)
Eléments de géométrie tressée.
Financement : Vacations puis ATER
Directeur : D. Gourevitch

(9) – Abouqateb Abdelhak (février 1999) (a donné lieu à publication)
Thèse d'Etat, Université de Marrakech (préparée à Valenciennes).
Courants invariants, courants basiques et classes caractéristiques de G-fibrés.
Financement : ATER
Directeur : A. El Kacimi

(10) – Sohou Toussaint (mai 2000) (a donné lieu à publication)
En Cotutelle Université de Valenciennes et Université de Abidjan.
Fiancement : Bourse thèse en alternance
Spectre de l'espace des feuilles. Problème additif de Cousin basique.
Directeurs : A. El Kacimi & E. Fédida (Abidjan)

(11) – Mriss Zakaria (décembre 2000) (a donné lieu à publication)
Opérateurs de Laplace sur les variétés tressées non quasiclassiques.
Fiancement : Vacations puis ATER
Directeur : D. Gourevitch

(12) – Delacroix Frédéric (juin 2001) (a donné lieu à publication)
Courants invariants et formes automorphes d'un groupe kleinéen élémentaire.
Financement : Allocation de Recherche MENRT puis ATER
Directeur : A. El Kacimi

(13) – El Khalloufi-Oucherif Dounia (juin 2001)
Produit interne de modules de Dieudonné et applications.
Directeur : H. Gaudier
Financement : Vacations puis ATER

(14) – Godin Marjory (juin 2002) (a donné lieu à publication)
Structure galoisienne d'anneaux d'entiers.
Directeur : B. Sodaïgui
Financement : Vacations puis ATER

(15) – Leclercq Régis (juin 2002) (a donné lieu à publication)
Traces dans les catégories tressées et indice q-equivariant.
Directeur : D. Gourevitch
Financement : Enseignant dans le Secondaire

(16) – Andréo Emmanuel (juin 2004) (a donné lieu à publication)
Dissociation des extensions algébriques de corps par les extensions galoisiennes ou galsimples non galoisiennes.
Financement : Allocation de Recherche MENRT puis ATER
Directeur : R. Massy

Thèses en cours

(1) – Bruche Clément
Directeur : B. Sodaïgui
Sujet : *Structures de modules galoisiens.*

(2) – Dehghan-Nezhad Akbar
Directeur : A. El Kacimi
Sujet : *Equation homologique d'un système dynamique.*

(3) – Dutriaux Atoine
Directeur : D. Gourevich
Sujet : *Analyse sur les fibrés quantiques.*

(4) – ROUSSEAU Cédric
Directeur : A. El Kacimi
Sujet : *Déformations d'actions de groupes et de réseaux résolubles.*
R. Parthasarathy du Tata Institute (Bombay) suit aussi de près ce travail de thèse.

(5) – Ramifidisoa Lucius
Directeur : L. Vrancken
Sujet : *Étude des hypersurfaces isoparamétriques dans la géométrie différentielle affine.*

(6) – Slimène Jihène
Directeurs : A. El Kacimi et M. Blel (Monastir) (Thèse en cotutelle)
sujet : *Courants invariants par des groupes d'automorphismes complexes.*
Le $\overline{\partial}$ le long des feuilles.

(7) – Trabelsi Houda
Directeur : En cotutelle L. Vrancken et M. Ben Ammar (Fac. Sc. Tunis).
sujet : *Sphères affines admettant des feuilletages.*

Séminaires, Rencontres, Congrès

– **Séminaire d'Algèbre-Géométrie** – Valenciennes : depuis avril 1996.

Responsables : R. Massy jusqu'en juin 1998, G. Zafindratafa jusqu'en juin 2000 et M. Hartl de septembre 2000 à septembre 2002. Responsable depuis septembre 2002 : L. Vrancken.

– **Ecole TANGA (Théorie Algébrique des Nombres et Géométrie Arithmétique)**. Lille, du 26 au 29 mars 2001.

Organisateurs : P. Dèbes (Lille I), B. Erez et P. Cassou-Noguès (Bordeaux I) & B. Sodaïgui (Valenciennes).

– **Modules galoisiens en géométrie arithmétique**. Lille du 8 au 13 juillet 2001.

Organisateurs : P. Dèbes, J.-C. Douai (Lille I), B. Erez, P. Cassou-Noguès (Bordeaux I) & B. Sodaïgui (Valenciennes).

– B. Sodaïgui a participé à l'organisation des **22èmes Journées Arithétiques** qui ont eu lieu à Lille I. Il a aussi organisé une journée arithmétique en juin 2002 à Valenciennes.

– **Journée Pédagogique Régionale**. Valenciennes le 5 juin 2002.

Organisateurs : C. Bruter (Paris), A. El Kacimi (Valenciennes) et V. Vassallo (Lille I).

– **Feuilletages et Systèmes dynamiques** en l'honneur de G. Hector. Lille-Valenciennes du 19 au 22 juin 2002.

Organisateurs : M. Belliart (Lille I) et A. El Kacimi (Valenciennes).

– **Nème rencontre du SIC (Séminaire Itinérant de Catégories)** en l'honneur de Y. Diers, Valenciennes le 16 mai 2003.

Organisateur : R. Massy (Valenciennes).

– **Géométrie et Visualisation**. Maubeuge le 18 juin 2003.

Organisateurs : B. Sainson, F. Trincaretto et V. Vaillant (à Maubeuge) et A. El Kacimi (Valenciennes).

– **Differential Geometry of Submanifolds**, du 25 au 29 juin 2003, Valenciennes-Leuven.

Organisateur : L. Vrancken (Valenciennes).

– **Ecole de Géométrie et Visualisation**. Maubeuge du 21 au 25 juin 2004.

Organisateurs : F. Trincaretto et V.Vaillant (Maubeuge) et A. El Kacimi (Valenciennes). Trois cours par A. El Kacimi, H.C. Hege (ZIB, Berlin) et K. Polthier (ZIB, Berlin).

Coopération internationale financée

Programme **Pavle Savic** (Université de Belgrade pour 2004). Responsable : L. Vrancken.

Comités de Lecture

A. El Kacimi

Revue **Proyecciones** éditée au Chili.
Revue **JP Journal of Topology and Geometry** éditée en Inde.

L. Vrancken

Revue **Results in Mathematics** .

Géométrie et Systèmes dynamiques

Membres

– R. Barre
– A. El Kacimi
– D. Gourevitch
– L. Vrancken
– R. Parthasarathy (PAST de 1999 à 2001)

– O. Birembaux
– A. Kabila
– J.-L. Valein
– A.-J. Vanderwinden
– G. Zafindratafa
– A. Zeggar

– F. Delacroix (jusqu'en septembre 2002)
– A. Dehghan-Nezhad
– R. Leclercq
– C. Rousseau
– J. Slimène
– H. Trabelsi

Thèmes de recherche

Variétés feuilletées, systèmes dynamiques, analyse globale (réelle et complexe). Actions de groupes, représentations. Quasi-cristaux. Dynamique symbolique. Géométrie des sous-variétés. Géométrie non commutative. Géométrie convexe.

R. Barre

Recherche d'exemples de calcul de K-théorie de feuilletages à partir du cas du tore hyperbolique muni de l'un de ses feuilletages stables.

O. Birembaux

Résultats obtenus :

- J'ai un article *Foliated splitting principle and basic Chern classes* soumis à Hokkaido Mathematical Journal. C'est une version basique du "Splitting principle" pour une certaine classe de fibrés feuilletés. Ce résultat est une généralisation du "Splitting principle" classique. Le référé acceptera le papier si je justifie l'isomorphisme entre certains espaces de formes différentielles basiques. Je dois résoudre encore cette difficulté ou revoir une hypothèse.

Perspectives

- J'ai presque fini de classifier les hypersurfaces M^2 dans $\mathbb{R}^3$ ayant même connexion affine de Blaschke induite telle que l'image de la courbure soit de dimension 1. L'article devrait être terminé cette année.

A. El Kacimi

Depuis quelques années je travaille dans plusieurs directions seul ou en collaboration. Mes thèmes principaux sont : (i) la théorie des feuilletages sous l'aspect systèmes dynamiques et analyse globale (réelle et complexe) ; (ii) les quasi-cristaux et leur coloriage ; (iii) la dynamique symbolique.

1 - Feuilletages transversalement holomorphes

Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension (complexe) n *transversalement holomorphe* sur une variété M est donné par un recouvrement ouvert $\{V_i\}_{i\in I}$ et, pour chaque $i \in I$, un difféomorphisme $\mathcal{O}_i \times \Omega_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i$ (où Ω_i est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{O}_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$) tel que, sur tout $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, le changement de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(x,z) = (x', z')$ soit de la forme $z' = \gamma_{ij}(z)$ et $x' = \varphi_{ij}(x,z)$ avec γ_{ij} holomorphe. A la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ est associé le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ des germes de *fonctions basiques holomorphes* ; il est pour l'espace des feuilles ce qu'est le faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes pour une variété complexe. Le *problème additif de Cousin basique* relativement à un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}$ se formule de la façon suivante : sur chaque U_{ij} on se donne une fonction basique holomorphe f_{ij} telle que $f_{ij} + f_{ji} = 0$ et $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ sur U_{ijk}. Sur chaque U_i, on cherche une fonction basique holomorphe f_i telle que, sur U_{ij} on ait $f_{ij} = f_j - f_i$. La famille $\{f_{ij}\}$ définit un 1-cocycle sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Le problème a une solution si ce cocycle est un cobord *i.e.* si sa classe de cohomologie dans $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ est nulle. Par suite, le problème additif de Cousin basique pour $\mathcal{U}$ a une solution pour tout 1-cocycle $\{f_{ij}\}$ si, et seulement si, $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = 0$. L'espace vectoriel $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ contient donc exactement les obstructions à la résolution d'un tel problème. Dans [ES] on a obtenu les résultats qui suivent.

- Une résolution fine et elliptique en termes de formes différentielles du faisceau (plus général) $\mathcal{O}^p_{\mathcal{F}}$ des germes de formes basiques holomorphes.

- Quelques méthodes générales de calcul, qu'on applique aux revêtements feuilletés et à divers exemples de feuilletages obtenus par suspension d'un groupe Γ de biholomorphismes d'une variété complexe F.

- Dans le cas d'une suspension d'un groupe Γ, on montre que le calcul de $H^*(M, \mathcal{O}^p_{\mathcal{F}})$ se ramène souvent à celui de la cohomologie du groupe discret Γ à valeurs dans le Γ-module $\mathcal{O}^p(F)$ des fonctions holomorphes sur F. Des calculs explicites de $H^1(\Gamma, \mathcal{O})$ ont été faits et en particulier lorsque $\Gamma = \mathbb{Z}$ et de façon plus complète, lorsque $F = \mathbb{C}^2$ et Γ engendré par un élément de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

Que peut-on encore faire ?

- Le cas d'une action de $\mathbb{Z}$ engendrée par un élément de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

- Le cas où Γ est le groupe libre $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ engendré par deux transformations biholomorphes du disque unité.

2 - <u>Le $\overline{\partial}$ le long des feuilles</u>

Un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension m (complexe) *holomorphe* sur une variété M est donné par un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ et des difféomorphismes $\Omega_i \times \mathcal{O}_i \xrightarrow{\varphi_i} U_i$ (où Ω_i est un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et $\mathcal{O}_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$) tels que, sur tout $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(z,t) = (z',t')$ soit de la forme $z' = \gamma_{ij}(z)$ et $t' = \varphi_{ij}(z,t)$ avec φ_{ij} holomorphe en z pour t fixé. Chaque feuille possède une structure complexe variant (transversalement) de façon différentiable. Ceci nous permet de définir la notion de forme différentielle feuilletée (*i.e.* le long des feuilles) de type (p,q) ($r = p+q$ étant le degré total). Celles-ci forment un espace vectoriel $A^{p,q}(M,\mathcal{F})$ et de façon analogue au cas classique, on a un opérateur de Cauchy-Riemann le long des feuilles $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} : A^{p,q}(M,\mathcal{F}) \longrightarrow A^{p,q+1}(M,\mathcal{F})$ vérifiant $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}^2 = 0$. Ce qui permet de définir la cohomologie de Dolbeault le long des feuilles $H^{p,q}(M,\mathcal{F})$. La nullité de cet espace est équivalente à l'existence d'une solution $\alpha \in A^{p,q-1}(M,\mathcal{F})$ de l'équation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \beta$ pour toute forme $\beta \in A^{p,q}(M,\mathcal{F})$ telle que $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\beta = 0$. C'est le *problème du $\overline{\partial}$ le long des feuilles.* Dans [Ek] j'ai traité les points suivants.

- Énoncé de quelques problèmes ouverts et le contexte dans lequel certains d'entre eux sont liés et peuvent être résolus.

- Étude de quelques propriétés des fonctions holomorphes le long des feuilles en dimension (complexe) 1.

- Résolution du problème du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ pour les feuilletages riemanniens complets dont toutes les feuilles sont des surfaces de Riemann fermées (au sens topologique) et non compactes.

- Une version feuilletée du théorème de Mittag-Leffler, un théorème d'existence de fonctions holomorphes le long des feuilles et à zéros prescrits.

<u>Que peut-on encore faire ?</u>

Résoudre la conjecture suivante : *soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe riemannien complet. On suppose que toute feuille est fermée (au sens topologique) et de Stein. Alors $H^{0q}(M,\mathcal{F}) = 0$ pour $q \geq 1$.*

3 - <u>Vers une théorie de l'indice basique</u>

La référence [Ek2] est une conférence que j'ai donnée à une **Ecole d'Été** à Beyrout (Liban) en 2001 sur l'*Opérateur de Dirac.* Son but était de rappeler la décomposition de Hodge pour les opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien que j'ai obtenue en 1990. Elle est restée d'actualité car elle permet la formulation du problème de l'existence d'un théorème de l'indice pour de tels opérateurs semblable à celui de Atiyah-Singer. Dans ce même papier, j'ai démontré que la signature basique d'un feuilletage riemannien était égale à l'indice d'un opérateur de ce type ; ce qui justifie fortement l'intérêt d'une telle question.

<u>Que peut-on encore faire ?</u>

Il reste bien entendu le calcul effectif de l'indice d'un opérateur transversalement elliptique sur un feuilletage riemannien (d'une variété compacte) en termes d'invariants transverses.

4 - Déformations de feuilletages

Dans [EGN], nous nous sommes intéressés aux déformations d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété compacte M défini par une 1-forme ω sur M à valeurs dans $\mathcal{G}$ (algèbre de Lie d'un groupe de Lie G) vérifiant l'équation d'intégrabilité de Maurer-Cartan. Pour un tel feuilletage :

- nous avons montré l'existence d'un espace versel de dimension finie paramétrant une déformation à travers laquelle transitent toutes les autres. C'est un espace de modules local ;

- pour plusieurs exemples assez significatifs, nous avons décrit cet espace versel et pour beaucoup d'autres, nous avons calculé l'espace de leurs déformations infinitésimales.

Que peut-on encore faire ?

Ce sujet est assez riche et ouvre des perspectives d'avenir. Beaucoup de choses restent à y exploiter. Il serait certainement une bonne source pour quelques sujets de thèses.

5 - Groupes d'homéomorphismes

Soient E un espace métrique et Homéo(E) le groupe des homéomorphismes de E muni de la topologie C^0. Un groupe d'homéomorphismes G de E est tout simplement un sous-groupe de Homéo(E). Pour tout $x \in E$, on notera $G(x)$ son orbite. Un ensemble $M \subset E$ est dit *minimal* s'il est fermé, invariant et minimal (au sens de l'inclusion) pour ces propriétés ; une orbite est dite *minimale* si son adhérence est un minimal. On rappelle que la *classe* d'une orbite O, qu'on note $C\ell(O)$, est la réunion des orbites O' telles que $\overline{O}' = \overline{O}$. Bien sûr $C\ell(O) = \{x \in E : \overline{G(x)} = \overline{O}\}$. Dans [EHS] nous avons démontré les théorèmes qui suivent.

Théorème 1. *Soit G un groupe équicontinu d'homéomorphismes d'un espace métrique E. On a les propriétés suivantes.*

1) Toute orbite O est minimale.

2) Si toute orbite est fermée, l'espace des orbites E/G est séparé.

3) L'espace des classes d'orbites $E/\widetilde{G}$ est toujours séparé.

4) Si E est compact, l'adhérence $\overline{G}$ de G dans Homéo(E) *est un sous-groupe compact d'homéomorphismes de E et, pour tout $x \in E$, on a $\overline{G}(x) = \overline{G(x)}$.*

Théorème 2. *Soit G un groupe dénombrable équicontinu d'homéomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Si G possède une orbite relativement compacte, toute orbite est relativement compacte. On a le même résultat si E est un espace métrique compact connexe.*

Nous y avons aussi étudié l'homotopie du groupe Homéo$_+(\mathbb{S}^1)$ des homéomorphismes du cercle $\mathbb{S}^1$ qui préservent l'orientation. On y donne une nouvelle démonstration élémentaire du fait que Homéo$_+(\mathbb{S}^1)$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^1$.

6 - Trace de la C^*-algèbre d'un pavage

Dans l'article (A. El Kacimi & R. Parthasarathy, *Coloring Quasicrystals with prescribed Symmetries and Frequencies*, Discrete & Comput. Geom. 22, (1999), 459-475) nous avons montré l'existence d'un coloriage d'un quasi-cristal hiérarchique (*i.e.* construit à l'aide d'un nombre fini de pavés en respectant certaines règles) avec des symétries et des fréquences prescrites. Dans [EP1], nous montrons que ce coloriage est lui-même décrit à l'aide d'un pavage hiérarchique. On décrit alors l'unique trace de la C^*-algèbre qui lui est associée et on exhibe les fréquences d'apparition des couleurs à l'aide de cette trace.

7 - Diagrammes de Bratteli et systèmes dynamiques

Dans la théorie des systèmes dynamiques, un important théorème montre que tout système dynamique de Cantor minimal est isomorphe à un système de Bratteli-Vershik *i.e.* un système dynamique associé à un diagramme de Bratteli proprement ordonné. Mais en présence d'une action d'un groupe fini sur un système dynamique minimal de Cantor, le groupe G n'agit sur aucun des diagrammes de Bratteli proprement ordonnés donnés par ce théorème. Toutefois, on peut associer de façon naturelle un diagramme de Bratteli non proprement ordonné sur lequel le groupe G agit. On ne peut pas avoir la transformation de Vershik qui n'existe que pour les diagrammes de Bratteli proprement ordonnés. Nous proposons alors une nouvelle construction qui permet d'associer un système dynamique de Cantor même si le diagramme n'est pas proprement ordonné. Notre résultat dans [EP2] est le suivant.

Lorsque les arêtes d'un diagramme de Bratteli proprement ordonné sont marqués par les éléments d'un groupe fini G, nous construisons un diagramme de Bratteli anti-produit et nous lui associons un système dynamique muni d'une action de G.

Que peut-on encore faire ?

Dans le contexte de l'existence d'une application d'un digaramme de Bratteli non proprement ordonné vers un autre proprement ordonné avec la propriété du “relèvement unique des chemins”, nous nous proposons :

- d'étudier les “groupes dimension” du système dynamique sous-jacent au diagramme de Bratteli totalement ordonné ;

- d'appliquer la propriété d'*équivalence forte orbitale* dans le contexte de ces nouvelles constructions ;

- de préciser quels marquages donnent lieu à des systèmes dynamiques de Toeplitz et leur associer des systèmes dynamiques obtenus par substitution lorsque les marquages sont stationnaires.

J'ai trois étudiants en thèse : C. Rousseau, J. Slimème en cotutelle (M. Blel, Monastir) et A. Dehghan-Nezhad. Je vais décrire sommairement leurs travaux en commençant par celui de C. Rousseau qui est, pour le moment, le plus avancé parmi les trois.

• [Ro1] - C. Rousseau, *On the Sobolev infinitesimal rigidity of a linear hyperbolic action on the* 2*-torus* $\mathbb{T}^2$. Prépulication avril 2004. Soumise.

Position générale du problème. Soit M une variété différentiable connexe compacte, Γ un groupe discret de présentation finie et ρ une représentation injective de Γ dans le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M muni de sa topologie naturelle de Fréchet. Soit T une boule centrée en 0 dans $\mathbb{R}^d$. On appelle *déformation* de ρ une application continue $t \in T \longmapsto \rho_t \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ telle que $\rho_0 = \rho$. Question naturelle : *existe-t-il* $\varepsilon > 0$ *tel que, pour* $|t| < \varepsilon$, ρ_t *soit conjuguée à* ρ ? Ce problème, dit de *rigidité*, est hautement non trivial. Mais on peut regarder ce qui se passe seulement au niveau des *déformations infinitésimales* ; celles-ci sont décrites par l'espace de cohomologie $H^1(\Gamma, C^\infty(TM))$ du goupe discret Γ à valeurs dans le Γ-module $C^\infty(TM)$ des champs de vecteurs C^∞ sur M. On peut aussi être moins exigeant et ne s'intéresser qu'au module $W^s(TM)$ des champs qui sont dans la classe de Sobolev W^s. Si $H^1(\Gamma, C^\infty(TM)) = 0$ (resp. $H^1(\Gamma, W^s(TM)) = 0$), on dira que ρ est C^∞-infinitésimalement rigide (resp. W^s-infinitésimalement rigide). C. Rousseau a examiné le cas où $M = \mathbb{T}^2$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ et l'action est engendrée par une matrice hyperbolique $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ considérée comme difféomorphisme linéaire du tore $\mathbb{T}^2$. Il a alors démontré le théorème qui suit.

Théorème. *L'espace vectoriel* $H^1(\Gamma, W^s(TM))$ *est nul pour* $0 \leq s < 1$ *et de dimension infinie si* $s \geq 1$. *En particulier la rigidité infinitésimale* C^∞ *n'a jamais eu lieu.*

• [Ro2] - C. Rousseau, *Déformations de réseaux de certains groupes résolubles.* Prépulication mai 2004. (Ce travail est aussi suivi par R. Parthasarathy (Tata Institute, Bombay).)

Position générale du problème. Soient Γ un groupe discret de présentation finie, G un groupe de Lie et $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation. Deux représentations ρ et ρ' sont dites *équivalentes*, s'il existe $g \in G$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait $\rho(\gamma) = g^{-1} \cdot \rho'(\gamma) \cdot g$. Le groupe Γ agit sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G via ρ et la représentation adjointe de G, et en fait donc un Γ-module. L'espace de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ décrit les déformations de classes d'équivalence de ρ. C. Rousseau s'est intéressé à la situation suivante. Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ hyperbolique ayant toutes ses valeurs propres réelles positives. Alors on a deux actions : $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow A^t(x) \in \mathbb{R}^n$ et $(k, \mathbf{m}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow A^k(\mathbf{m}) \in \mathbb{Z}^n$. Celles-ci permettent de construire les deux produits semi-directs : G obtenu à partir de l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$ et Γ obtenu à partir de l'action de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}^n$; Γ est évidemment un sous-groupe de G et ρ n'est rien d'autre, dans ce cas là, que l'inclusion. Il a alors démontré, en utilisant divers outils élaborés, entre autres la suite spectrale de Hochschild-Lyndon-Serre, que l'espace vectoriel $H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ est non nul. Le calcul exact de sa dimension s'avère d'une difficulté inattendue. Nous espérons qu'il sera mené à terme dans un avenir proche.

• J. Slimène. *Le* $\overline{\partial}$ *le long des feuilles sur le tore hyperbolique.*

Ce travail rentre dans le thème que je viens de développer au 2). Soit A une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à 2 (on dira que A est *hyperbolique*). Alors A admet deux valeurs propres distinctes réelles λ et $\frac{1}{\lambda}$ toutes deux positives et irrationnelles. On peut donc définir la matrice A^t pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a une action :

$$(t, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow A^t(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

qui permet de construire le produit semi-direct $G = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$; G est un groupe de Lie résoluble simplement connexe de dimension 3. Comme A est à coefficients entiers, l'action de $\mathbb{Z}$ similaire à celle décrite ci-dessus stabilise le sous-groupe $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ et permet donc de construire le réseau cocompact $\Gamma = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$ de G. Le quotient G/Γ est une variété compacte $\mathbb{T}_3^A$ de dimension 3 qui fibre en tores $\mathbb{T}^2$ au-dessus du cercle $\mathbb{S}^1$. Notons $(1, a)$ et $(1, b)$ les vecteurs propres dans $\mathbb{R}^2$ associés respectivement à λ et à $\frac{1}{\lambda}$. Il est facile de voir que les champs de vecteurs :

$$X = \lambda^t \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} \right), \qquad Y = \frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad T = \lambda^{-t} \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

sont bien définis sur $\mathbb{T}_3^A$. Les deux champs X et Y engendrent une action localement libre du groupe affine de dimension 2 qui définit donc un feuilletage de codimension 1 sur $\mathbb{T}_3^A$. On pose $J(X) = Y$ et $J(Y) = -X$; on définit ainsi une structure presque complexe sur les feuilles ; comme celles-ci sont de dimension réelle 2, J est intégrable et munit $\mathcal{F}$ d'une structure de feuilletage holomorphe. L'opérateur $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ n'est rien d'autre que le champ complexe (le long des feuilles) $X + iY$. Le résultat obtenu par J. Slimène s'énonce alors comme suit :

Soit $g : \mathbb{T}_A^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^∞. Alors il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{T}_3^A)$ telle que $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} f = g$ si, et seulement si, $\int_{\mathbb{T}_3^A} g = 0$.

• A. Dehghan-Nezhad. *Equation homologique d'un système dynamique continu.*

Soit M une variété (différentiable connexe) de dimension n. Un champ de vecteurs X sur M est dit *singulier* s'il s'annule en au moins un point de M ; autrement on dira qu'il est *non singulier*. On convient d'appeler *système dynamique* le couple (M, X) où X est un champ de vecteurs non singulier sur M.

On note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur M. On s'intéresse au problème suivant :

On se donne une fonction $g \in C^\infty(M)$ et on cherche une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $Xf = g$.

L'équation $Xf = g$ est dite équation *homologique* du système dynamique (M, X).

Ce problème a beaucoup d'importance en théorie des systèmes dynamiques mais il est aussi très difficile d'attaque dans la plupart des cas. Le premier résultat obtenu par A. Dehghan-Nezhad a consisté à donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution de cette équation lorsque X est un champ invariant diophantien sur un groupe de Lie.

D. Gourevitch

Résultats obtenus

En utilisant la relation de Cayley-Hamilton (que j'avais découverte auparavant) pour certaines algèbres non commutatives, j'ai construit des modules projectifs sur des orbites non commutatives qui sont les analogues quantiques des fibrés en droites dans l'approche de Serre-Swan. En outre, pour ces modules, j'ai introduit et calculé un q-indice dans la définition duquel un analogue quantique de la trace est essentiellement impliqué.

Perspectives

Actuellement je travaille sur des aspects K-théoriques de la Géométrie non commutative sur les orbites quantiques et leurs application aux modèles dynamiques. En outre, je m'intéresse aux super-algèbres et leurs q-déformations qui sont analogues des orbites non commutatives dans la supermathématique.

C. Ohn

Résultats obtenus

1. Variétés de drapeaux quantiques

En 1988, G. Lusztig et M. Rosso ont montré (indépendamment) que les groupes quantiques de Drinfel′d-Jimbo ont la même théorie des représentations que les groupes semi-simples complexes (qui sont leurs analogues classiques). À la lumière du théorème de Borel-Weil, il était alors naturel de se demander s'il existe un analogue quantique des variétés de drapeaux. Cette question a été traîtée de divers points de vue par de nombreux auteurs durant les années 1990.

Parallèlement, une approche de la géométrie projective non commutative a vu le jour, initiée par Artin, Tate et Van den Bergh, et considérablement développée depuis. L'un des attraits de cette approche est qu'elle permet d'associer des (vraies!) variétés projectives à certaines algèbres graduées *non* commutatives.

C'est suivant cette approche que j'ai étudié la question des variétés de drapeaux quantiques. Les variétés obtenues sont des réunions de sous-variétés lisses et T-invariantes de la variété de drapeaux usuelle G/B ($T \subset B$ étant un tore maximal). Dans [Oh1], je montre que, pour $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, cette variété est effectivement une "variété de drapeaux quantique" à la Artin-Tate-Van den Bergh.

2. Classification des $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ quantiques

Dans un travail publié en 1999, j'avais classifié presque toutes les algèbres de Hopf ayant la "même" théorie des représentations que le groupe $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$, en ce sens que:

– toute représentation est complètement réductible,
– les représentations irréductibles sont paramétrées par les poids dominants usuels, et ont les dimensions classiques,
– le produit tensoriel de deux représentations irréductibles se décompose en somme directe avec les multiplicités classiques.

Dans [Oh2], j'ai pu compléter cette classification: la structure des cas manquants, liés à des courbes elliptiques, a pu être dévissée grâce aux méthodes géométriques introduites dans [Oh1].

3. Projets dans l'immédiat

Étude de la limite $q \to 0$ des variétés de drapeaux quantiques de [Oh1]. Cette limite devrait faire apparaître des structures combinatoires qu'il s'agira alors de relier à d'autres telles structures en théorie des représentations (cristaux de Kashiwara, chemins de Littelmann, polytopes de Berenstein-Zelevinsky).

L. Vrancken

Résultats obtenus

Mon thème de recherche principal est la géométrie différentielle des sous-variétés, et plus en particulier la géométrie diffrentielle affine et l'étude des sous-variétés des espaces réels ou complexes caractérisées par un principe variationnel. Mes résultats incluent entre-autres :

- La solution d'une conjecture de Magid-Ryan pour les sphères affines.
- La classification de toutes les sous-variétés lagrangiennes dans l'espace projectif complexe qui satisfont l'égalité de Chen.
- La classification des immersions parallèles affines.
- La découverte et la caractérisation des nouvelle classes de sphères affines.

Perspectives

Les perspectives prioritaires pour le moment consistent à :

- étudier la relation entre les surfaces minimales dans les sphères et les sous-variétés lagrangiennes de l'espace projectif complexe ;
- étudier l'unicité et la rigidité des hypersurfaces affines (par rapport à la connexion induite) ;
- étudier les hypersurfaces affines pour lesquelles les invariants algébriques admettent des symétries.

Publications dans des revues à comité de lecture

R. Barre & A. El Kacimi

[BE] - *Foliations.* A paraître dans **Handbook of Differential Geometry**.

O. Birembaux

[B] - *Foliated splitting principle and basic Chern classes*, en passe d'être accepté dans **Hokkaido Mathematical Journal**.

F. Delacroix

[De] - *Invariant currents and automorphic forms of an elementary Kleinian group.* **Hokkaido Mathematical Journal**, Vol. XXX n. 2 (2001), 405-430.

A. El Kacimi

[EGN] - *On deformations of transversely homogeneous foliations.* (Avec G. Guasp et M. Nicolau). **Topology**, Vol. 40, 6, (2001), 1363-1393.

[Ek1] - *de Rham-Hodge classique.* Colloque 2001 **Société Mathématique de Tunisie**, 113-142.

[Ek2] - *Towards a Basic Index Theory.* A paraître dans les proceedings du **Summer School on Dirac Operator : Yesterday and Today**, Beirut 2001.

[ES] - *Sur le problème additif de Cousin basique* (avec T. Sohou). **Proyecciones** Vol. 22, 3 (2003), 243-271.

[EHS] - *Remarques sur certains groupes d'homéomorphismes d'espaces métriques* (avec H. Hattab et E. Salhi). **JP Journal of Geometry & Topology**, à paraître.

A. El Kacimi & R. Parthasarathy

[EP1] - *Trace Splittings of C^*-algebras of tilings via colorings* (avec R. Parthasarathy). **Proc. Amer. Math. Soc.** 131 (2002), no. 4, 1191–1204.

D. Gourevitch

[GS1] - *Quantum line bundles via Cayley-Hamilton identity*, (avec P. Saponov), J. Phys. A: Math. Gen., 34 (2001), 4553 – 4569.

[GS2] - *Quantum line bundles on a noncommutative sphere* (avec P. Saponov), J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002), 9629–9643.

[GLS1] - *Traces in braided categories*, (avec R. Leclercq et P. Saponov) Journal of Geometry and Physics 44 (2002), 251–278.

[GS3] - *Equivariant noncommutative index on braided orbits* (avec P. Saponov), Proceedings of XXIV International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, 447-450.

[GS4] - *On multidimensional representations of reflection equation algebra* (avec P. Saponov), Theor. and Math. Physics (Englich translation from Russian), 139 (2004), 486-499.

C. Ohn

[Oh1] - *Classical flag varieties for quantum group: the standard quantum* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, Advances in Math. 171 (2002), 103-138.

L. Vrancken

[CaV] - *Minimal Lagrangian submanifolds of CP^3 and the sinh-Gordon equation* (avec I. Castro), Results Math., 40(1-4), (2001), 130-143.

[KSV] - *An extremal class of 3-dimensional elliptic affine spheres* (avec M. Kriele et C. Scharlach), Hokkaido Math. J., 30(1), (2001), 1-23.

[LV1] - *Projectively flat affine surfaces with flat affine metric* (avec C.I. Lee), J. Geom., 70(2), (2001), 85-100.

[MV] - *Affine surfaces in $\mathbb{R}^5$ with zero cubic form* (avec M. Magid), Diff. Geom. Appl., 14(2), (2001), 125-136.

[Vr1] - *Affine surfaces in 4-dimensional affine space with plana geodesics*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 29, (2001), 263-302.

[RV1] - *Lagrangian submanifolds of the 3-dimensional complex projective space* (avec C. Rodriguez Montealegre), J. Math. Soc. of Japan, 53(3), (2001), 603-631.

[Vr2] - *Parallel affine immersions with maximal codimension*, Tôhuku Math. J. (2), 53(4), (2001), 511-531.

[CV1] - *Slant surfaces with prescribed Gaussian curvature* (avec B.Y. Chen), Balkan J. Geom. Appl. 7, (2002), 29-36.

[CV2] - *Lagrangian submanifolds of the complex hyperbolic space* (avec B.Y. Chen), Tsukuba J. Math. 26, (2002), 95-118.

[Vr3] - *Three dimensional affine hypersurfaces generated by two dimensional partial differential equations*, Math. Nachr. 237, (2002), 129-146.

[Vr4] - *Lagrangian submanifolds with constant sectional curvature in indefinite complex space forms*, Proc. AMS 130, (2002), 1459-1466.

[Vr5] - *Special Lagrangian submanifolds of the nearly Kaëhler* 6*-space*, Glasgow Math. J. 45 (2003), 415-426.

[Vr6] - *Rigidity of affine hypersurfaces with rank* 1 *shape operator*, Internat. J. of Math. 14 (2003), 211-234.

[CV3] - *Lagragian minimal isometric immersions of a Lorentzian real space form into a Lorentzian complex space form* (avec B.Y. Chen), Tôhuku Math. J. (2), 54 (2002), 121-143, Glasgow Math. J. 45 (2003), 415-426.

[DVV] - *Cubic form geometry for immersions in centro-affine and graph hypersurfaces* (avec F. Dillen et G. Verbouwe), Results Math. 43, (2003), 88-95.

[SV1] - *Parallel surfaces in affine* 4*-space* (avec C. Scharlach). Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 73 (2003), 167-179.

[BSV] - *From surfaces in the* 5*-sphere to* 3*-manifolds in complex projective* 3*-space* (avec J. Bolton et C. Scharlach), Bull. Austral. Math. Soc. 66 (2002), 465-475.

[LV2] - *A basic inequality and new characterization of Whitney spheres in a complex space form* (avec H. Li), Israël J. of Math., à paraître.

[BV] - *Ruled minimal Lagrangian manifolds in complex projective* 3*-space* (avec J. Bolton), Asian J. of Math., à paraître.

[LV3] - *New examples of Willmore surfaces in* $\mathbb{S}^n$ (avec H. Li), nn. of Global Ana. & Geom. (2003), 205-225.

Prépublications

A. El Kacimi

[Ek3] - *Sur le problème du* $\overline{\partial}$ *le long des feuilles et quelques applications.* Juin 2003.

A. El Kacimi & R. Parthasarathy

[EP2] - *Skew-product for group-valued edge labellings of Bratteli diagrams,* (en collaboration avec R. Parthasarathy). Prépublication mai 2004. Soumise.

D. Gourevitch

[GLS2] - *q-Index on braided noncommutative sphere* (avec R. Leclercq et P. Saponov).

C. Ohn

[Oh2] - *Quantum* $SL(n,\mathbb{C})$*'s: the missing case*, octobre 2002. Soumise.

C. ROUSSEAU

[Ro1] - *On Sobolev infinitesimal rigidity of a hyperbolic action on the 2-torus* $\mathbb{T}^2$. Prépublication Univ. Valenciennes (2004). Soumise.

[Ro2] - *Déformation de réseaux dans certains groupes résolubles.* Prépublication Univ. Valenciennes (2004).

L. VRANCKEN

[RV2] - *A characterization of Lagrangian worped poduct immersions* (avec C. Rodriguez).

[SV2] - 3-*dimensional afine hypersurfaces admitting a pointwise SO(2) or* $\mathbb{Z}_3$*-symmetry* (avec C. Scharlach).

Séjours scientifiques (deux semaines ou plus)

A. EL KACIMI

– Du 1er au 28 février 2002 : **Professeur invité** à l'Université de Sfax (cours de DEA sur la *Théorie de Hodge classique* et conférences).

– Du 28 mars au 10 avril 2002 : Université du Caire, Giza.

– Du 29 octobre au 2 novembre 2002 : **Aspects of Foliations**, E. Schrödinger Institute, (Vienne).

– Le mois de février 2003 : **Professeur invité** à l'université de Monastir (cours de DEA en *Topologie différentielle*).

– Du 9 août au 9 septembre 2003 : **Visiting Research Professor**, Nihon University, Tokyo.

– Février 2004 : **Visiting Professor** National University of Singapore.

– Du 17 avril au 2 mai 2004 : **Visiting Professor**, Tata Institute of Fundamental Research (Bombay). Conférence au "Mathematics Colloquium" *Deformation theory of transversely homogeneous foliations.*

– Du 16 au 28 mai 2004 : **Ecole du CIMPA Géométrie et Topologie différentielle. Géométrie algorithmique** (FST de Marrakech). Cours *Géométrie et topologie des feuilletages.*

D. GOUREVITCH

– Novembre à décembre 2001 : Math. Institut Oberwolfach dans le cadre du Programme "Research in Pairs".

– Octobre à décembre 2002 : Max Planck Institute for Mathematics (Bonn).

– Juillet à décembre 2003 : Max Planck Institute for Mathematics (Bonn).

– Mars 2003 : Mittag-Leffler Institut (Stokholm)

L. VRANCKEN

– Juin et Juillet 2001 : Technische University of Berlin.

– Juillet et Août 2002 : Technische University of Berlin.

– Du 10 au 25 Août 2003 : Technische University of Berlin

<u>Congrès, colloques, journées...</u>

<u>R. Barre</u>

– Workshop sur les **Invariants de Seiberg-Witten** (Marrakech du 4 au 9 juin 2001).

– **Espaces d'opérateurs et aplications** (Marseille du 4 au 8 mars 2002).

– **Quantification et intégration des algébroïdes de Lie** (Toulouse du 15 au 16 mars 2002).

– **Feuilletages et systèmes dynamiques**, Colloque en l'honneur de G. Hector (Lille-Valenciennes du 19 au 22 juin 2002).

– **Géométrie et dynamique des groupes** (Marseille du 15 au 19 juillet 2002).

– **Graphes et cohomologie en Mathématiques et Physique** (Strasbourg du 19 au 21 septembre 2002).

<u>O. Birembaux</u>

- Juin 2003 : Workshop à K.U. Leuven

<u>A. El Kacimi</u>

– Du 19 au 22 mars 2001 : **Colloque annuel de la SMT** à Hammamet (Tunisie). *La théorie de Hodge basique.*

– Du 27 août au 7 septembre 2001 : **Summer School and Workshop on Dirac Operator : Yesterday and Today** Centre for Advanced Mathematical Sciences, Amercian University of Beirut. *Transversely Elliptic Operators on Foliations.*

– Du 22 au 26 avril 2002 : **Colloque Topologie et Singularités** au CIRM (Luminy).

– Du 22 au 24 mai 2002 : **Discrete Groups and Geometric Structures**, (Kortrijk).

– Du 6 au 11 janvier 2003 : **Geometría Compleja y Sistemas Dinámicos**, Cuernavaca (Mexique) (Colloque pour le 60ème anniversaire de A. Verjovsky).

– Du 2 au 6 juin 2003 : **Ecole de Géométrie et Topologie** FST de Marrakech.

– Le 17 juin 2003 : **Géométrie et visualisation**, Maubeuge.

– Du 18 au 21 juin 2003 : **Joint Meeting RMSE-AMS**, Séville.

– Du 25 au 28 juin 2003 : **Géométrie des sous-variétés**, Valenciennes-Leuven.

– Du 3 au 5 septembre 2003 : **Workshop on topology**, Tokyo University.

– Du 10 au 19 septembre 2003 : **Geometry and Foliations 2003**, Kyoto.

<u>D. Gourevitch</u>

– Janvier 2001 : Fields Institut, Toronto University (Canada), **Workshop on Quasi-classical and Quantum structures** .

– Juin 2001 : **Colloques** at Gotteburg and Lund Universities (Suède).

– Juin 2001 : **Mini-Workshop on Noncommutative Geometry** at Oslo University (Norvège).

– Juin 2002 : **XXIV International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics** (Paris).

– Jullet 2003 : International Workshop **Supersymmetries and Quantum Symmetries** (Dubna).

– Juin 2004 : Rencontre **Géométrie et Physique**, CIRM (Marseille).

– juillet 2004 : Conférence internationale **Quantum Groups** (Haïfa, Israël).

L. Vrancken

– Du 23 au 25 novembre 2001 : Workshop **PDE an Submanifods**, TU of Berlin.

– Du 16 au 20 mai 2002 : Workshop **Contemporary Geometry and related Topics**, Belgrade.

– Du 10 au 14 juillet 2003 : **Differential Geometry of Submanifolds and Integrable Systems**, Kobe (Japon).

– Du 22 au 28 septembre 2003 : **DPE, Submanifolds and affine Differential geometry**, Banach Center, Bedlewo (Pologne).

C. Ohn

– Du 8 au 10 juin 2001 : **BMS-DMV Joint Meeting**, Liège.

– Du 27 au 28 juin 2001 : **Journée d'Algèbre**, Reims.

– Du 17 au 20 juillet 2001 : **AMS-SMF Joint Meeting**, ENS de Lyon.

– Du 17 au 19 décembre 2001 : Colloque **Lie Groups**, Twente (Pays-Bas).

– Le 23 février 2001 : **Journée d'Algèbre**, Clermont-Ferrand.

– Du 8 au 19 avril 2002 : Workshop **On Invariant Teory**, Queen's University, Kingston (Canada).

– Du 28 mai au 1er juin 2002 : Conférence **Hopf algebras in noncommutative geometry and physics**, Bruxelles.

– Du 9 au 13 décembre 2002 : Rencontre **Variétés de carquois et bases canoniques en théorie des représentations** CIRM, Luminy.

– Du 31 janvier au 1er février 2003 : **Journée d'Algèbre**, Saint-Étienne.

Petits séjours et exposés aux séminaires

O. Birembaux

– Le 7 septembre 2004 : Académie des Sciences de Belgrade.

– Le 11 septembre 2004 : Faculté de Mathématiques Université de Belgrade.

A. El Kacimi

– Du 19 au 26 janvier 2002 : Université de Cocody (Abidjan).

– Une semaine en avril 2003 : **Visiting Professor** National University of Singapore.

– Le 29 septembre 2003 : Chiba Institute of Technolgy

– Du 19 février au 3 mars 2001 : Instituto de Matemàtica, Cuernavaca (Mexique).

– 13 mars 2001 : Université de Nancy.

– Du 28 octobre au 4 novembre 2001 : Université de Monastir (Tunisie).
– Décembre 2003 et mars 2004 : Université de Monastir (Tunisie).

Plusieurs exposés au séminaire de Valenciennes et une dizaine d'autres aux différents séminaires de Lille I.

D. Gourevitch

– Février 2001 2002 : ENS (Paris)
– Mai 2001 : Université d'Angers
– Décembre 2001 : Université de Strasbourg
– Décembre 2001 : Université Paris-7
– Avril 2002 : ENS (Paris)
– Mai 2002 : Université d'Amiens
– Juin 2002 : Université de Marseille-2
– Janvier 2003 : North-East University (Boston, USA)
– Janvier 2003 : Université du Québec à Montreal
– Avril 2003 : Université de Strasbourg
– Avril 2004 : Max Planck Institut (Bonn).
– Mai 2004 : IHP (Paris).

C. Ohn

– Le 22 février 2001 : Université de Poitiers.
– Le 28 mai 2001 : Université Catholique de Louvain.
– Le 2 octobre 2001 : Université Libre de Bruxelles.
– Le 13 février 2002 : Universität Wuppertal (Allemagne).
– Le 15 mai 2002 : Université de Valenciennes.

L. Vrancken

– Octobre 2002 : Technische Universität of Berlin.
– Novembre 2002 : Université de Valenciennes.
– Du 14 au 24 juillet 2003 : Tokyo Metropolitan University;
– Du 24 au 30 juillet 2004 : Hokkaido University.
– Décembre 2003 : Université de Valenciennes.
– Février 2004 : KU Leuven.
– Mars 2004 : KU Leuven.
– Du 4 au 7 mars 2004 : University of Belgrade.
– Du 27 avril au 2 mai 2004 : : Technische Universität of Berlin.
– Du 7 au 15 juin 2004 : University of Durham (Angleterre).
– Du 7 au 12 septembre 2004 : University of Belgrade.

Algèbre et Théorie des Nombres

Membres

- Y. Diers (Retraité depuis septembre 2002)
- H. Gaudier
- M. Hartl
- R. Massy

- F. Goichot
- D. Hémard
- B. Loiseau
- S. Monier-Derviaux
- B. Sodaïgui
- P. Van Den Bosch

- E. Andréo
- C. Bruche
- M. Godin

Thèmes de recherche

Théorie de Galois constructive, 2-cohomologie, structures galoisiennes des anneaux d'entiers. Homologie, algèbre commutative. Théorie des catégories géométriques. Géométrie algébrique. Groupes algébriques en inégale caractéristique. Homologie, algèbre non commutative. Structures polynomiales en théorie des groupes nilpotents, algèbres de groupes.

Groupe de travail : *Foncteurs polynomiaux*

Le groupe de travail "Foncteurs polynomiaux" fonctionne depuis mars 2002, au rythme d'une séance hebdomadaire de 1 h 30 à 2 h hors congés universitaires. Les participants sont de cultures mathématiques variées : arithmétique, logique, groupes quantiques... La première année a donc été consacrée aux bases : catégories, foncteurs, foncteurs adjoints, foncteurs représentables, catégories additives et abéliennes, algèbre tensorielle (symétrique, extérieure et à puissances divisées), algèbre homologique. Nous arrivons maintenant au cœur du sujet, avec trois exposés consacrés au "survol" de la littérature récente sur les foncteurs polynomiaux, puis une série d'exposés détaillés sur la définition des foncteurs strictement polynomiaux, privilégiant l'approche de Friedlander-Suslin (Invent. Math. 127 (1997), 209-270). Parallèlement, le séminaire du laboratoire a permis d'inviter A. Zimmermann (Amiens) et A. Troesch (Paris VI) qui nous ont exposé leurs résultats récents.

La présentation par M. Hartl et H. Gaudier des algèbres tensorielle, symétrique, extérieure, à puissances divisées par foncteurs adjoints est pour l'essentiel originale. On prévoit d'en mettre une version rédigée à disposition en ligne.

Perspectives

- Le calcul "concret" d'extensions réalisant des classes dans des *Ext* : dans bien des cas, des méthodes compliquées et indirectes permettent de montrer l'existence d'un élément vérifiant telle ou telle propriété, dans un groupe *Ext* d'une catégorie de foncteurs. Il serait intéressant, dans le cas du Ext^1 déjà, de savoir construire explicitement une extension représentant cet élément.

- Étendre certains résultats de la théorie, connus pour les espaces vectoriels sur un corps, au cas des modules libres sur un anneau, par exemple celui des entiers.

- Dans un article de H.J. Baues, M. Hartl, T. Pirashvili, (JPAA 122 (1997), 1-40) est entamé le développement de structures algébriques non linéaires (quadratiques, dans un premier temps ; elles devraient par la suite être polynomiales de degré quelconque, voire analytiques) généralisant les anneaux et modules : les lois de distributivité entre somme et produit ne sont plus forcément linéaires, mais polynomiales ; le groupe additif de tels objets n'est plus nécessairement commutatif, mais reste nilpotent. Cette théorie devrait étendre l'algèbre classique, fournissant un cadre approprié à l'étude de certains phénomènes non linéaires en théorie de l'homotopie ainsi qu'en théorie des groupes. On peut imaginer également d'autres applications : par exemple, aller déjà jusqu'à l'ordre 3 permettrait d'inclure les opérades classiques et d'espérer généraliser la correspondance "de Malcev" entre groupes et algèbres de Lie.

Participants : R. Barre, S. Derviaux, H. Gaudier, F. Goichot, M. Hartl, D. Hémard, B. Loiseau, C. Ohn.

F. Goichot

Résultats obtenus

Le théorème bien connu de Milnor-Moore relie algèbres de Lie et algèbres de Hopf. J'ai obtenu un théorème analogue pour la version "non commutative" des algèbres de Lie, les algèbres de Leibniz définies par Loday. Ce travail est paru (voir ci-dessous). La structure "de Hopf" obtenue ainsi sur la digèbre libre permet de décomposer l'homologie dendriforme (*i.e.* pour l'opérade duale de celle des digèbres) des algèbre de Zinbiel (opérade duale de Leibniz). Cette partie est rédigée :

http://www.univ-valenciennes.fr/lamath/PagesPerso/Goichot/Euler.dvi

mais l'analogie avec la décomposition bien connue de l'homologie cyclique des algèbres commutatives permet de conjecturer que le dernier morceau de la décomposition ci-dessus est l'homologie de Zinbiel. J'espère inclure ce résultat avant publication.

Perspectives

La suite logique de ce qui précède se situe dans le cadre des algèbres tridendriformes de Loday-Ronco. Les mêmes techniques m'ont déjà permis de conjecturer une version commutative de ces algèbres, dont Loday a noté qu'elle se retrouve dans l'étude des polylogarithmes (*cf.* P. Cartier, Sém. Bourbaki mars 2001, 885 p.16). Mais l'étude de cette opérade reste à faire.

- dans le groupe de travail “Foncteurs polynomiaux”, et en particulier le lien envisagé avec les opérades.

M. Hartl

Résultats obtenus

Dans un travail en cours, je développe une approche nouvelle au problème de déterminer le module des relations entre les relations d'une présentation de groupe, au niveau non abélien, cad., comme sous-module du module croisé associé. A ce niveau, le problème est équivalent à celui de déterminer le deuxième groupe d'homotopie d'un CW-complexe X de dimension 2, avec une construction explicite d'applications continues $\mathbb{S}^2 \to X$ représentant les éléments de $\pi_2(X)$.

Mon approche est essentiellement homologique et non pas combinatoire comme les méthodes existantes dans la littérature. En effet, elle est basée sur l'observation suivante : il est bien connu qu'un calcul de générateurs du module des relations entre les relations d'une présentation d'un groupe G, permet de calculer la cohomologie $H^2(G, M)$ à coefficients dans un G-module quelconque M ; or je montre que réciproquement, si on est capable de construire toutes les extensions de G par tous les modules M, on saura calculer le module des relations entre les relations de toute présentation de G.

Dans la suite, j'ai alors construit toutes les extensions d'un groupe qui est extension centrale d'un groupe dont toutes les extensions sont déjà connues. Les formules obtenues étant assez simples, on sait alors déterminer toutes les extensions d'un groupe nilpotent de type fini G par un G-module quelconque, de manière algorithmique (par récurrence suivant la suite centrale descendante). Ceci permet alors, en principe, de déterminer le module des relations entre les relations d'une présentation quelconque d'un groupe nilpotent de type fini. Comme illustration, j'ai traité facilement (à la main nue !) un vieil exemple de Sieradsky qui n'avait été traité dans la littérature que récemment, à l'aide d'un impressionant calcul formel effectué sur ordinateur (par l'équipe de R. Brown à Bangor).

Perspectives

Les résultats susmentionnés devraient permettre de construire, en principe, tous les groupes nilpotents de classe ≤ 5 (comme extension de $G/\gamma_3(G)$ par $\gamma_3(G)$). Je tenterai d'en déduire une description *fonctorielle* du multiplicateur de Schur $H_2(G)$ de tout groupe nilpotent de classe ≤ 4, en extension de mon résultat dans le cas de classe 2 (cf. mon article *The nonabelian tensor square and Schur multiplicator of nilpotent groups of class 2*, J. of Algebra 179, 416-440, (1996)).

D'autre part, en collaboration avec H. Gaudier, on espère pouvoir généraliser les résultats mentionnés, aux groupes résolubles.

R. Massy

- R. Massy, *Une construction algorithmique des p-extensions cycliques de corps, de caractéristique différente de p, contenant les racines p-ièmes de l'unité*, Acta Arithmetica **103.1** (2002), 21 - 26.

Résumé. En 1989, Karpilovsky a posé le problème d'une description explicite de toutes les p-extensions cycliques. En 1999, T. Crespo a donné une famille complète d'extensions cycliques de degré 8 d'un corps de caractéristique autre que 2. Par une méthode différente, nous avons construit toutes les p-extensions cycliques des corps de caractéristique différente de p qui contiennent les racines p-ièmes de l'unité, ceci quel que soit le nombre premier p.

Les éléments primitifs que nous obtenons sont des produits alors que l'on emploie généralement des résolvantes de Lagrange-Hilbert additives. L'avantage de ces produits est qu'ils permettent de simplifier aisément par les puissances p-ièmes, d'où, au final, des éléments primitifs beaucoup moins longs que ceux en termes de résolvantes. De plus, nos éléments primitifs sont tous définis canoniquement de manière algorithmique, ce qui n'est pas le cas des résolvantes dont la non nullité dépend à chaque fois d'un choix empirique.

- E. Andréo & R. Massy, *Parallélogrammes galoisiens infinis*, Annales Mathématiques Blaise Pascal **8.2** (2001), 21 - 45.

Résumé. Nous généralisons en degrés infinis les résultats de [M-MD] R. Massy & S. Monier-Derviaux, *Parallélogrammes galoisiens*, J. Algebra **217** (1999), 229 - 248.

Nous présentons une théorie de Galois infinie en dimension 2 qui généralise aux parallélogrammes de degré quelconque le théorème classique de Krull pour les extensions galoisiennes infinies. Toutes les propriétés essentielles de [M-MD] sont conservées, mais les démonstrations sont différentes car utilisant des arguments topologiques.

- R. Massy, *Galois averages*, à paraître dans Journal of Number Theory.

Résumé. Comment étendre une extension galoisienne finie quelconque E/F par une autre N/E de façon à ce que N/F soit galoisienne et comment, dans ce cas, exhiber un élément primitif de N sur E ? Ce problème est trop vaste pour être abordé dans sa généralité. On particularise donc en étendant l'extension donnée E/F par une extension N/E la mieux connue possible : une extension cyclique.

Lorsque cette extension cyclique est kummérienne, des résultats dans cette direction ont été obtenus par Hasse en 1947 ; mais ils ne sont guère utilisés ni utilisables. Avec la notion nouvelle de "moyenne galoisienne", nous nous plaçons ici dans le cas où N/E est cyclique de degré premier p. On la suppose d'abord kummérienne, puis on traite le cas difficile où $E \cap \mu_p = \{1\}$ ($p \neq 2$). A titre d'application, on construit toutes les extensions galoisiennes de degré ≤ 9.

- Travail de thèse d'Emmanuel Andréo (directeur : Richard Massy) "Dissociation des extensions algébriques de corps par les extensions galoisiennes ou galsimples non galoisiennes."

Résumé. Les extensions de corps non galoisiennes peuvent être considérées comme chaotiques. Est-il possible "d'approximer" les extensions algébriques, ou tout au moins cer-

taines d'entre elles, par les extensions galoisiennes ? On dévisse les groupes par leurs sous-groupes en suite normale. Ne peut-on dissocier les extensions algébriques par leurs corps intermédiaires de façon à constituer une tour qui comporte le plus grand nombre possible de "marches" galoisiennes ?

Nous appelons "tour galoisienne" une tour de corps qui ne comporte que des marches galoisiennes. Nous disons que deux tours galoisiennes d'une même extension sont "équivalentes" si et seulement si elles ont le même nombre de marches et si, à l'ordre près, les groupes de Galois de ces marches sont isomorphes. Nous avons prouvé l'analogue galoisien suivant au théorème de Schreier :

Théorème. *Deux tours galoisiennes d'une même extension admettent des raffinements équivalents.*

Ici, le terme de "raffinement" est pris dans un sens analogue à celui qu'il a en théorie des groupes : au lieu de rajouter des sous-groupes à la suite normale, on rajoute des corps intermédiaires à la tour considérée. La démonstration utilise de manière déterminante la notion de parallélogramme galoisien en degré fini ou infini, qui joue, pour les corps, le rôle du Lemme de Zassenhaus ("Butterfly Lemma") pour les groupes.

Appelons "raffinement galoisien" d'une tour donnée, un raffinement de cette tour ayant la propriété supplémentaire suivante : dès que l'on rajoute un corps différent de tous ceux de la tour donnée, il est nécessairement galoisien sur celui qui précède. Nous disons qu'une tour galoisienne de L/K est "de composition" si et seulement si elle est stricte et n'admet aucun raffinement galoisien propre. Nous avons prouvé l'analogue galoisien suivant au théorème de Jordan-Hölder :

Théorème. *Soit L/K une extension finie admettant une tour galoisienne.*

1) Toute tour galoisienne de L/K admet un raffinement qui est une tour de composition de L/K.

2) Deux tours de composition de L/K sont équivalentes.

Enfin, grâce à la notion de "corps d'intourabilité" et celle de "tour d'élévation", nous avons généralisé les deux théorémes précédent à *toutes* les extensions finies.

B. SODAÏGUI

Résultats obtenus

Le domaine de mes recherches est la Théorie des Nombres (ou arithmétique) dans le cadre de la théorie de A. Fröhlich concernant *Galois Module Structure* (voir [F2 : A. Fröhlich, *Galois Module Structure of Algebraic Integers*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.] ou [F1 : A. Fröhlich, *Arithmetic and Galois module structure for tame extensions*, J. Reine Angew. Math. 286/287 (1976), 380–440.]). (2000 Math. Subject classification : 11R33).

Dans la suite, si K est un corps de nombres, O_K désigne son anneau d'entiers et $Cl(K)$ son groupe des classes.

Soient k un corps de nombres, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $Gal(\overline{k}/k)$ son groupe de Galois. Soit Γ un groupe fini. A tout homomorphisme surjectif π défini sur $Gal(\overline{k}/k)$ et à valeurs dans Γ, on associe le sous corps N de $\overline{k}$ fixe par $Ker(\pi)$. L'extension N/k

est galoisienne et son groupe de Galois $Gal(N/k)$ est isomorphe à $Gal(\overline{k}/k)/Ker(\pi)$, d'où un isomorphisme, que l'on note aussi π, défini sur $Gal(N/k)$ et à valeurs dans Γ. A l'aide de π on munit O_N d'une structure de $O_k[\Gamma]$-module définie de la manière suivante: pour tout $x \in O_N$ et tout $\gamma \in \Gamma$, on pose $\gamma x = \pi^{-1}(\gamma)(x)$. Soit $\mathcal{M}$ un ordre maximal de O_k dans l'algèbre semi-simple $k[\Gamma]$ contenant $O_k[\Gamma]$. Lorsque N/k est modérément ramifiée, on peut associer à O_N une classe notée $[O_N]$ dans $Cl(O_k[\Gamma])$, le groupe des classes de $O_k[\Gamma]$, et par extension des scalaires la classe de $\mathcal{M} \otimes_{O_k[\Gamma]} O_N$ notée $[\mathcal{M} \otimes_{O_k[\Gamma]} O_N]$ dans $Cl(\mathcal{M})$, le groupe des classes de $\mathcal{M}$.

On désigne par $\mathcal{R}(O_k[\Gamma])$ (resp. $\mathcal{R}(\mathcal{M})$) l'ensemble des classes c de $Cl(O_k[\Gamma])$ (resp. $Cl(\mathcal{M})$) telles qu'il existe une extension N/k modérément ramifiée, à groupe de Galois isomorphe à Γ, avec $[O_N] = c$ (resp. $[\mathcal{M} \otimes_{O_k[\Gamma]} O_N] = c$); on dira que c est réalisable par l'extension N/k et que $\mathcal{R}(O_k[\Gamma])$ (resp. $\mathcal{R}(\mathcal{M})$) est l'ensemble des classes réalisables.

Il est facile de voir que $\mathcal{R}(O_k[\Gamma]) \subset Cl^\circ(O_k[\Gamma])$ (resp. $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \subset Cl^\circ(\mathcal{M})$), où $Cl^\circ(O_k[\Gamma])$ (resp. $Cl^\circ(\mathcal{M})$) est le noyau du morphisme $Cl(O_k[\Gamma]) \to Cl(k)$ (resp. du morphisme $Cl(\mathcal{M}) \to Cl(k)$) induit par l'augmentation $O_k[\Gamma] \to O_k$ (resp. $\mathcal{M} \to O_k$).

Les résultats de McCulloh (voir [M : L. R. McCulloh, *Galois module structure of abelian extensions*, J. Reine Angew. Math. 375/376 (1987), 259–306.]) vont dans le sens de la conjecture suivante :

Conjecture 1. *L'ensemble $\mathcal{R}(O_k[\Gamma])$ est un sous-groupe de $Cl^\circ(O_k[\Gamma])$.*

Les tentatives de prouver cette conjecture se heurtent aux difficultés qui proviennent des unités locales des algèbres de groupes (voir la preuve d'une conjecture de Fröhlich dans [T : M. J. Taylor, *On Fröhlich's conjecture for rings of tame extensions*, Invent. Math. 63 (1981), 41–79.] ; voir [BS1], [BS2] dans le rapport de LAMATH). Pour contourner ces problèmes on étudie la conjecture plus faible suivante :

Conjecture 2. *L'ensemble $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ est un sous-groupe de $Cl^\circ(\mathcal{M})$.*

La conjecture 1 entraîne la conjecture 2. En effet : l'extension des scalaires de $O_k[\Gamma]$ à $\mathcal{M}$ induit un morphisme surjectif $Ex : Cl(O_k[\Gamma]) \to Cl(\mathcal{M})$ et il est clair que $Ex(\mathcal{R}(O_k[\Gamma])) = \mathcal{R}(\mathcal{M})$.

Signalons qu'une conséquence de la preuve de l'une de ces deux conjectures serait la résolution du problème inverse de la théorie de Galois (voir [J.-P. Serre, *Topics in Galois Theory*, Research Notes in Mathematics, Vol. 1, Boston, 1992.]) par une nouvelle méthode qui provient de l'étude des questions concernant la structure galoisienne des anneaux d'entiers ; ce qui renforce, encore une nouvelle fois, avec (entre autres) la découverte d'un lien étroit entre cette structure et des invariants arithmétiques associés aux caractères de Γ provenant de l'équation fonctionnelle des fonctions L d'Artin (voir [F2] et [T]), le caractère profond de ces questions.

Le cas où $k = \mathbb{Q}$ et Γ réalisable comme groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ est bien connu. La conjecture 1 est vérifiée (voir [T]) ; de plus $\mathcal{R}(O_k[\Gamma])$ est trivial si Γ ne possède pas de caractère symplectique (c'est le cas par exemple de Γ abélien ou d'ordre impair). Quant à $\mathcal{R}(\mathcal{M})$, il est toujours trivial (voir [F2, corollaire du théorème 6, pp. 40–41] ou [F1, corollaire du théorème 11, p. 412]).

Si k est un corps de nombres quelconque et Γ est abélien, McCulloh (voir [M]) a montré que la conjecture 1 est vraie en utilisant une "correspondance de Stickelberger".

La motivation principale de mes travaux est l'étude des deux conjectures précédentes, dans le cas où Γ est non abélien, tout en déterminant effectivement les éléments de l'ensemble des classes réalisables.

Rappelons la définition de la classe de Steinitz. Soit K/k une extension finie de corps de nombres de degré n. L'anneau O_K est un O_k-module sans torsion de rang n, donc il existe un idéal I de O_k tel que $O_K \simeq O_k^{n-1} \oplus I$ en tant que O_k-module. La classe de I dans $Cl(k)$, qui ne depend que de O_K, est appelée la classe de Steinitz de l'anneau O_K ou de l'extension K/k (voir [A. Fröhlich, M. J. Taylor, *Algebraic Number Theory*, Cambridge University Press, 1991, Theorem 13] ou [H. Cohen, *Advanced Topics in Computational Number Theory*, Springer-Verlag, GTM 193, New York, 2000, Theorem 1.2.19.]). La structure de O_K en tant que O_k-module est complétement déterminée par son rang et sa classe de Steinitz.

Lorsque nous essayons d'étudier les conjectures 1 et 2, nous sommes confrontés au problème de plongement en liaison avec les classes de Steinitz.

Une autre partie de mes travaux consiste en l'étude des classes de Steinitz dans le cadre que je vais maintenant définir.

Soient Γ un groupe fini et Δ un sous-groupe normal de Γ. On a donc la suite exacte de groupes suivante:

$$\Sigma : 1 \longrightarrow \Delta \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Delta \longrightarrow 1.$$

Fixons E/k une extension galoisienne dont le groupe de Galois est isomorphe à Γ/Δ. On désigne par $R_m(E/k, \Sigma)$ (m pour modéré) l'ensemble des classes $c \in Cl(k)$ vérifiant : il existe une extension galoisienne modérément ramifiée N/k dont la classe de Steinitz est c, contenant E, et dont le groupe de Galois est isomorphe à Γ, avec un isomorphisme π de $Gal(N/k)$ dans Γ tel que E est le sous-corps de N fixe par $\pi^{-1}(\Delta)$.

Lorsque $\Delta = \Gamma$, $R_m(E/k, \Sigma)$ est tout simplement l'ensemble des classes de Steinitz des extensions galoisiennes modérées de k, dont le groupe de Galois est isomorphe à Γ ; on note $R_m(k, \Gamma)$ au lieu de $R_m(E/k, \Sigma)$.

Signalons un lien immédiat avec les deux conjectures précédentes. L'injection naturelle $O_k \to O_k[\Gamma]$ induit le morphisme de restriction $Res : Cl(O_k[\Gamma]) \to Cl(k)$ qui, à la classe de l'anneau des entiers d'une extension modérée de k, à groupe de Galois isomorphe à Γ, associe sa classe de Steinitz dans $Cl(k)$ (voir [F2, Chap. II, §3, pp. 62–63]). Donc $Res(\mathcal{R}(O_k[\Gamma]) = R_m(k, \Gamma)$. Par suite la conjecture 1 implique la conjecture suivante :

Conjecture 3. *L'ensemble $R_m(k, \Gamma)$ est un sous-groupe de $Cl(k)$.*

Il découle de [M] que cette conjecture est vraie lorsque Γ est abélien ; on peut voir [R. Long, *Steinitz classes of cyclic extensions of prime degree*, J. Reine Angew. Math. 250 (1971), 87–98.] pour une description plus explicite de $R_m(k, \Gamma)$ dans le cas où Γ est un groupe cyclique d'ordre un nombre premier. Lorsque Γ n'est pas abélien, l'étude de la conjecture 3 pourrait constituer une étape de celle des deux autres.

Je donne maintenant les grandes lignes de la démarche adoptée pour l'étude des conjectures précédentes.

Fröhlich a généralisé au cas non abélien la notion classique de résolvante de Lagrange et a donné une nouvelle description du groupe des classes d'un ordre en terme d'homomorphismes galoisiens du groupe des caractères virtuels de Γ dans certains autres groupes (voir [F2] ou [C. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders*, Vol. II, Wiley-Interscience, New York, 1987. , §74]). Par exemple, si Γ est un groupe fini tel que $k[\Gamma]$ satisfait la condition d'Eichler, alors

$$Cl(\mathcal{M}) \simeq \frac{Hom_{\Omega_k}(R_\Gamma, J(\overline{k}))}{Hom_{\Omega_k}(R_\Gamma, \overline{k}^{\times}) \times Hom_{\Omega_k}(R_\Gamma, U(\overline{k}))},$$

où R_Γ est le groupe des caractères virtuels de Γ, $\Omega_k = Gal(\overline{k}/k)$, $J(\overline{k})$ le groupe des idèles de $\overline{k}$, et $U(\overline{k})$ le sous-groupe des idèles unités de $J(\overline{k})$. Les outils fondamentaux sont :

- La description précédente.

- La théorie des représentations linéaires des groupes finis. - Les propriétés des résolvantes de Lagrange sous l'action galoisienne, et leurs propriétés fonctorielles relatives à l'induction, restriction et inflation de caractères de sous-groupes de Γ.

- La décomposition de puissances des résolvantes de Lagrange en un produit d'idéaux premiers dans certains anneaux d'entiers.

- La résolution de problèmes de plongement en liaison avec les classes de Steinitz, grâce aux critères de plongement, le calcul des classes de Steinitz, la théorie du corps de classes (voir [J. Neukirch, *Class Field Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.]) et le théorème de densité de Chebotarev dans les groupes des classes de rayon.

Dans [GS2] on montre la conjecture 2 pour le groupe alterné A_4 sous les hypothèses : le nombre des classes de k est impair et $k/\mathbb{Q}$ est linéairement disjoint du 3ème corps cyclotomique sur $\mathbb{Q}$. Dans [BS1, BS2] on s'interesse à la conjecture 1. Dans [BS1] on établit l'égalité $\mathcal{R}(O_k[A_4]) = Cl^\circ(O_k[A_4])$ pour tout corps de nombres k. Dans [BS2] on montre que $\mathcal{R}(O_k[D_4]) = Cl^\circ(O_k[D_4])$ sous l' hypothèse que l'ordre du groupe des classes de rayon de k modulo $4O_k$ est impair, où D_4 est le groupe diédral d'ordre 8. Dans [GS1] (resp.[GS3]), on montre la conjecture 3 pour A_4 (resp. le groupe symetrique S_4) sous les hypothèses le nombre des classes de k impair. Dans [CS] on montre la conjecture 3 pour le groupe quaternionien généralisé d'ordre $4p^r$, où p est un nombre premier impair et r un entier non nul. Dans [BGS], on montre (entre autres) les conjectures 2 et 3 lorsque Γ est le produit semi-direct $V \times_\rho C$, où V est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de dimension $r \geq 2$, C un groupe cyclique d'ordre $2^r - 1$, et ρ une représentation linéaire irréductible et fidèle de C dans V ; un exemple est le groupe alterné A_4. Un fait surprenant : la démonstration utilise des propriétés du code binaire de Hamming.

Perspectives

- La démonstration des conjectures dans toutes leurs généralités.
- Le travail dans le thème des modules galoisiens en géométrie arithmétique, dans la direction des travaux de T. Chinburg, Ph. Cassou-Noguès et M. J. Taylor (on pourrait les consulter via Mathscinet).

Publications dans des revues à comité de lecture

E. Andréo & R. Massy

[AM] - *Parallélogrammes galoisiens infinis.* **Annales Mathématiques Blaise Pascal** 8.2 (2001), 21-45.

Y. Diers

[Di1] - *Affine algebraic varieties relative to an algebraic theory.* **Applied Categorical Structures** 9 (2001), 35-40.

[Di2] - *Topological geometrical categories.* **Journal of Pure and App. Algebra**. A paraître.

M. Godin & B. Sodaïgui

[So1] - *Classes de Steinitz d'extensions à groupe de Galois A_4.* **Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux** 14 (2002), 241-248.

[GS2] - M. Godin, B. Sodaïgui, *Realizable classes of tetrahedral extensions*, J. Number Theory 98 (2003), 320-328.

[GS3] - M. Godin, B. Sodaïgui, *Module structure of rings of integers in octahedral extensions*, Acta Arithmetica 109.4 (2003), 321-327.

F. Goichot

[Go] - *Un théorème de Milnor-Moore pour les algèbres de Leibniz.* **Dialgebras and related operads**. Editeur J.-L. Loday. Lecture Notes in Math. 1763, Springer-Verlag (2001), 111-133.

R. Massy

[Ma1] - *Une construction algorithmique des p-extensions cycliques de corps, de caractéristique différente de p, contenant des racines $p^{\grave{e}mes}$ de l'unité*, **Acta Arithmetica** 103.1 (2002), 21-26.

[Ma2] - *Galois averages*, J. Number Theory, à paraître.

B. Sodaïgui

[BS1] - N.P. Byott, B. Sodaïgui *Realisable Galois module classes for tetrahedral extensions*, Compositio Math. (2004). À paraître.

[BS2] - N.P. Byott, B. Sodaïgui *Galois module structure for dihedral extensions of degree 8: realisable classes over the group ring*, J. Number Theory (2004), à paraître.

Publications d'Université

Y. Diers

[Di3] - *Classification of concrete geometrical categories.* Publication de l'Université de Valenciennes (2001).

H. Gaudier & R. Massy

[GM] - *Calcul effectif des 2-cocycles pour un groupe polycyclique scindé.* Prépublication Université de Valenciennes, (2004), 26 pages.

B. Sodaïgui

[BGS] - N.P. Byott, C. Greither & B. Sodaïgui, *Classes réalisables d'extensions non abéliennes.* Soumise.

[BGS] - J. Carter & B. Sodaïgui, *Steinitz classes in generalized quaternion extensions,.* Soumise.

Séjours scientifiques (au moins deux semaines)

B. Sodaïgui

– Du 1er au 15 septembre 2002 : Université d'Exeter (Angleterre).

– Du 1er février au 31 juillet 2004 : Délégation CNRS au laboratoire A2X de théorie des nombres de l'université Bordeaux I.

– Juillet 2004 : College of Charleston, USA.

Congrès, colloques, journées...

F. Goichot

– Du 3 au 7 septembre 2001 : **Colloque de Topologie Algébrique**, Nantes.

– Du 27 mai au 1er juin 2002 : **Modern Homotopy**, Lille-Louvain la Neuve.

– Du 9 au 13 septembre 2002 : **Colloque du GDR de Topologie algébrique**, Lille.

– Du 19 au 21 septembre 2002 : **RCP Physiciens théoriciens et Mathématiciens**, Strasbourg.

– Du 17 au 19 juin 2004 : **Algebraic Topology Conference**, Université de Louvain-la Neuve.

R. Massy

- Juillet 2001 : **XXIIèmes Journées Arithmétiques de Lille**. *Quelques éléments primitifs.*

B. Sodaïgui

– Une semaine en février 2002 : Oberwolfach.

– Juillet 2001 : **XXIIèmes Journées arithmétiques de Lille**.

– Juin 2002 : **Rencontres arithmétiques de Caen**.

– Du 9 au 13 juillet 2001 : **Galois modules in arithmetic geometry**, Lille.

Petits séjours et exposés aux séminaires

F. Goichot

– Le 9 février 2001 : Université de Lille I.

B. Sodaïgui

– Mars 2002 : Besançon.
– Février 2003 : Saint-Etienne.
– Mars 2003 : Limoges.
– Juin 2004 : séminaire de théorie des nombres de Bordeaux.