Vers une algèbre non-linéaire

François Goichot

Journée "Exposons-nous"

6 janvier 2011

Corps et espace vectoriel

- $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou. . .) : on a $+, -, \times, \div$ vérifiant. . .
- ce sont des corps (commutatifs)
- K étant fixé, un K-espace vectoriel est E muni de
  $E \times E \longrightarrow E, \ (x, y) \longmapsto x + y$ et
  $K \times E \longrightarrow E, \ (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$
  vérifiant. . .

Anneau et module

- A est un <u>anneau</u> si on a $+, -, \times$, $\div$ vérifiant...
  (mêmes axiomes que pour les corps)

- Exemples : $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[X], \mathcal{M}_n(K), \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(X), \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(X) \ldots$

- A étant fixé, un <u>A-module</u> est E muni de
  $E \times E \longrightarrow E, \;\; (x, y) \longmapsto x + y$ et
  $A \times E \longrightarrow E, \;\; (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$
  vérifiant...
  (mêmes axiomes que pour les espaces vectoriels)

Quelques exemples

- $\mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$-module,
- Si E est un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E, $(P, x) \mapsto P(u)(x)$ munit E d'une structure de $K[X]$-module,
- Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega)$-module,
- Pour M variété $\mathcal{C}^\infty$, TM est un $\mathcal{C}^\infty(M)$-module.

Un peu de vocabulaire. . .

Les catégories

Un peu de catégories

Catégorie		
$\underline{Ens}$	ensembles	
$\underline{Gp}$	groupes	
$\underline{Ann}$	anneaux	
$\underline{Top}$	espaces topologiques	
$\underline{K-Mod}$	K-modules	

(K anneau fixé)

etc

Principe

"L'important, ce sont les morphismes"

Un peu de catégories

Catégorie		
<u>*Ens*</u>	ensembles	applications
<u>*Gp*</u>	groupes	morphismes de groupes
<u>*Ann*</u>	anneaux	morphismes d'anneaux
<u>*Top*</u>	espaces topologiques	applications continues
<u>$K - Mod$</u>	K-modules	applications K-linéaires

(K anneau fixé)

etc

La définition

Techniquement, une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de :

- une collection d'<u>objets</u> notée $\operatorname{ob}\mathcal{C}$,
- pour chaque couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, d'un ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés <u>morphismes de X dans Y</u>,
- pour tous X, Y, Z objets de $\mathcal{C}$, d'une "loi de composition des morphismes" :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

qu'on note $(f, g) \mapsto g \circ f$ ou gf

./.

La définition (suite)

qui doivent vérifier :

- la composition est associative $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,
- pour chaque objet X, on a un morphisme “identité” noté Id_X, neutre pour la composition.

Un peu de catégories

Catégorie	objets	morphismes
$\underline{Ens}$	ensembles	applications
$\underline{Gp}$	groupes	morphismes de groupes
$\underline{Ann}$	anneaux	morphismes d'anneaux
$\underline{Top}$	espaces topologiques	applications continues
$\underline{K - Mod}$	K-modules	applications K-linéaires

(K anneau fixé)

etc

Une catégorie moins classique :

Soit G un groupe. On définit une catégorie $\mathcal{C}_G$ comme suit :

- $\mathcal{C}_G$ a un seul objet, noté $\star$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(\star, \star) = G$,
- la composition est donnée par le produit de G.

Un “problème universel”

Dans une catégorie $\mathcal{C}$, étant donné deux objets U et V, existe-t-il un objet T muni de deux morphismes $\pi_1 : T \to U$ et $\pi_2 : T \to V$, tels que :
$\forall W \in \mathcal{C}, \forall f : W \to U, \forall g : W \to V, \exists! h : W \to T \mid \pi_1 h = f, \pi_2 h = g$; autrement dit, h fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& T \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & V \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Un “problème universel”

Si un tel T existe, on l'appelle produit des objets U et V de $\mathcal{C}$ et on le note (en général) $U \sqcap V$. Le produit est donc caractérisé par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "f"'] & & \\
& U \sqcap V \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & V \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Un autre "problème universel"

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, "g"] & \\
U \arrow[r, "i_1"] \arrow[drr, "f"'] & U \sqcup V \arrow[dr, "h"] & \\
 & & W
\end{tikzcd}$$

L'objet $U \sqcup V$ caractérisé par cet autre diagramme est appelé, s'il existe, <u>coproduit</u> (ou somme) de U et V.

Coproduit : exemples

Dans $\mathcal{C} = \underline{Ens}$, le coproduit est la réunion disjointe, de même dans $\underline{Top}$. Dans $\underline{Gp}$ c'est le produit libre. Dans la catégorie des anneaux *commutatifs*, c'est le produit tensoriel.

Et dans $K - Mod$?

La catégorie des K-modules (K anneau fixé) a une propriété particulière : produit et coproduit existent *et* sont égaux plus précisément : $U \sqcap V = U \sqcup V = U \oplus V$, somme directe des deux modules (qui est aussi $U \times V$).
Application ?

Un autre point de vue sur l'algèbre linéaire

K étant toujours un anneau fixé, la catégorie des K-modules a d'autres propriétés spécifiques. En particulier :

1. chaque ensemble de morphismes $\mathrm{Hom}_{\underline{K-Mod}}(M, N)$ est muni d'une structure de groupe abélien, définie par $(f+g)(m) = f(m) +_N g(m)$
2. pour cette structure, la composition est bilinéaire : $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ et $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.

Une catégorie vérifiant ces deux propriétés est appelée un annélide, ou catégorie préadditive, ou "anneau à plusieurs objets". Pourquoi ?

Annélide

Soit $\mathcal{C}$ un annélide à un seul objet, noté $\star$. L'ensemble $A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \star)$ est donc un groupe abélien. Et la composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \star) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \star) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \star)$$

est donc une application bilinéaire $A \times A \to A$. Autrement dit. . .

Annélide

A est un anneau. En résumé :

- La catégorie des K-modules est un annélide,
- Un annélide à un seul objet n'est rien d'autre qu'un anneau.

Cette structure d'annélide (ou catégorie préadditive) est notre point de vue sur l'algèbre linéaire.

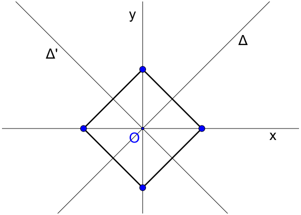
l'algèbre quadratique

Pour la structure de groupe :

Parmi les groupes non abéliens, les plus "simples" sont les groupes <u>2-nilpotents</u> :
le commutateur $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ n'est plus 1 comme dans un groupe abélien, mais on a quand même $[[a, b], c] = 1$ quels que soient a, b, c.

Exemples de groupes 2-nilpotents :

Un exemple géométrique : le groupe D_4 des isométries du carré est 2-nilpotent.



D_4 EST 2-NILPOTENT

En effet $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, r\,s, r^2 s, r^3 s\}$, r rotation de centre 0 et angle $\frac{\pi}{2}$, $s = s_{Ox}$, réflexion d'axe Ox.
On a

$$r\,s = s_\Delta \neq s\,r = r^3 s = s_{\Delta'}$$

donc D_4 n'est pas abélien. Mais

$$[r, s] = r\,s\,r^{-1} s^{-1} = r^2 \text{ et de même } [r^3, s] = r^2$$

et les autres commutateurs sont 1. Comme r^2 (demi-tour) commute avec r et s, il commute avec tout élément de D_4, qui est donc bien 2-nilpotent.

Exemples de groupes 2-nilpotents :

Un exemple algébrique : le groupe

$$\mathcal{U}_3 = \{M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a, b, c \in K\}$$

est un sous-groupe 2-nilpotent de $Gl_3(K)$.

Application quadratique entre groupes

Soient G, H deux groupes (on note $+$ leur opération) et $f : G \to H$ une application. Son <u>défaut</u> est

$$\begin{aligned} d_f : G \times G &\to H, \\ (x, y) &\mapsto f(x+y) - f(y) - f(x) \end{aligned}$$

Donc f est un morphisme si et seulement si son défaut est nul. On dira que f est <u>quadratique</u> si d_f est bilinéaire et les défauts commutent avec les images :

$$\forall x, y, z \in G, [d_f(x, y), f(z)] = 0$$

Application quadratique entre groupes

- Exemple : l'application $G \to G, x \mapsto 2x := x + x$ est quadratique si et seulement si G est 2-nilpotent.
- Problème : si l'on prend comme objets les groupes et comme morphismes les applications quadratiques, cela ne fait pas une catégorie.

Solution : la catégorie CP

On prend comme objets les *couples* (G, A), où G est un groupe et A un sous-groupe vérifiant :

1. A contient tous les commutateurs d'éléments de G,
2. tout élément de A commute avec tout élément de G.

Et pour les morphismes : un morphisme $(G, A) \to (H, B)$ sera une application $f : G \to H$ quadratique et vérifiant :

1. $f(A) \subset B$,
2. $\forall g, g' \in G, \quad d_f(g, g') \in B$
3. $d_f(g, g') = 0$ si g ou $g' \in A$.

Catégorie préquadratique

La catégorie $\mathcal{C}$ est préquadratique [à gauche] **si** elle est préadditive *à droite* :

1. chaque ensemble de morphismes $\mathrm{Hom}_{\underline{K-Mod}}(M, N)$ est muni d'une structure de groupe abélien,
2. la composition est bilinéaire *à droite* : $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$ et $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$, **et si**
3. la composition est quadratique à gauche :
$$d_{f*} : (g, g') \mapsto (g+g')\circ f - g'\circ f - g\circ f$$

est bilinéaire [et...]

Un annélide *carré*

C'est un quintuplet $\underline{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}, T, H, P)$ avec

- $\mathcal{R}$ catégorie préadditive à droite,
- $\mathcal{M}$ foncteur $\mathcal{R}^{op} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to$, $(X, Y, Z) \mapsto \mathcal{M}(X, Y|Z)$ additif en chaque variable,
- $T = T_{XYZ}$ isomorphisme naturel $\mathcal{M}(X, Y|Z) \to \mathcal{M}(X, Z|Y)$ satisfaisant $T^2 = \mathrm{Id}$,
- pour tous $X, Y \in \mathcal{R}$, des applications $\mathcal{R}(X, Y) \xrightarrow{H} \mathcal{M}(X, Y|Y) \xrightarrow{P} \mathcal{R}(X, Y)$

Un annélide carré (suite)

satisfaisant les axiomes suivants, où l'on abrège $\mathcal{M}(f, \mathrm{Id}|\mathrm{Id})$ en f^* et $\mathcal{M}(\mathrm{Id}, g|h)$ en $(g|h)_*$, et 2_X désigne $\mathrm{Id}_X + \mathrm{Id}_X$:

1. P est un morphisme de groupes, naturel en les deux variables,
2. $T_{XYY} = HP - \mathrm{Id}$,
3. $PT = P$,
4. pour $f \in \mathcal{M}(X, X'|X'), g \in \mathcal{R}(Y, Y'), f' \in \mathcal{R}(X, X'), g' \in \mathcal{M}(Y, Y'|Y')$, on a $(P(f)|g)_* = (f'|P(g'))_* = 0$,

Un annélide carré (suite et fin)

1. pour $f, g \in \mathcal{R}(X, Y)$, on a

$$H(f+g) = H(f) + H(g) + (g|f)_*(H(2_X)),$$

de sorte que H est une application quadratique,

2. pour $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ dans $\mathcal{R}$, on a

$$H(f \circ g) = (f|f)_*(H(g)) + g^*(H(f)),$$

3. pour $X \xrightarrow{g} Y \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} Z$ dans $\mathcal{R}$, on a

$$(f+f') \circ g = f \circ g + f' \circ g + P((f|f')_*(H(g))).$$

Un *anneau* carré

C'est la donnée de :

- un "presqu'anneau" (nearring) R_e ($+$ n'est pas commutative, $\times$ n'est distributive sur $+$ que du côté droit),
- un groupe abélien R_{ee},
- une application quadrilinéaire $R_e \times R_e \times R_{ee} \times R_e \to R_{ee}, \quad (r,s,x,t) \mapsto (r,s)\cdot x \cdot t,$ donnant sur R_{ee} une action à gauche du monoïde multiplicatif $R_e \times R_e$ et une action à droite du monoïde multiplicatif R_e,
- un morphisme de groupes $T : R_{ee} \to R_{ee}$ satisfaisant $T^2 = \mathrm{Id}$,

Un *anneau* carré (suite et fin)

et une application $H : R_e \to R_{ee}$ et un morphisme de groupes $P : R_{ee} \to R_e$ satisfaisant $PHP = P + P$ et les propriétés suivantes, où $r, s, t \in R_e$ et $x, y \in R_{ee}$:

1. P est binaturel, de sorte que $P((r,r) \cdot x \cdot s) = rP(x)s$,
2. $T = HP - \mathrm{Id}$,
3. $PT = P$,
4. $(P(x), r) \cdot y = (r, P(x)) \cdot y = 0$,
5. $H(r+s) = H(r) + H(s) + (s,r) \cdot H(2)$ où $2 = 1_R + 1_R$,
6. $H(rs) = (r,r) \cdot H(s) + H(r) \cdot s$,
7. $(r+s)t = rt + st + P((r,s) \cdot H(t))$,
8. $T((r,s) \cdot x \cdot t) = (s,r) \cdot x \cdot t$.